

УДК 51(07)  
В 93

Рецензенты:

доктор педагогических наук, профессор

*Ан. А. Шалманов*

доктор физико-математических наук

*А. А. Лундин*

В 93      Высшая математика и математическая статистика : учебное пособие для вузов / под общ. ред. Г. И. Попова. – М. : Физическая культура, 2007. – 368 с.  
ISBN 978-5-9746-0091-3

В учебном пособии изложены основные разделы линейной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики; рассмотрены примеры решения типовых задач по всем разделам курса. Особое внимание в пособии уделено непараметрическим критериям статистики, которые получили интенсивное развитие в плане выработки новых критериев за последние годы. Содержание пособия соответствует государственному образовательному стандарту и программе по дисциплине "Математика".

Учебное пособие предназначено для студентов ВУЗов физической культуры.

Авторский коллектив:

Попов Г. И. – д. п. н., профессор

Бритвина В. В. – к. п. н. (подгл. 2.13 (4 раздела))

Конюхов В. Г. – к. т. н., доцент (разд. 3)

Конюхова Г. П. – к. п. н., доцент (разд. 3, подгл. 2.13 (4 раздела))

Маркарян В. С. – к. т. н., доцент (разд. 1, разд. 4)

Орел В. Р. – к. б. н., доцент (разд. 1, 2, глава 1 (4 раздела))

УДК 51(07)

ISBN 978-5-9746-0091-3

© «Физическая культура», 2007

© Попов Г. И., Бритвина В. В., Конюхов В. Г.,

Конюхова Г. П., Маркарян В. С., Орел В. Р., 2007

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Раздел I. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ (В. Р. Орел, В. С. Маркарян) .....	11
Глава 1. Аналитическая геометрия на плоскости .....	11
1.1. Система координат. Координаты точки .....	11
1.2. Координаты направленного отрезка .....	12
1.3. Длина вектора .....	13
1.4. Векторы общего вида .....	13
1.5. Арифметические действия с векторами .....	13
1.6. Базис ортогональной системы координат .....	14
1.7. Коллинеарные векторы .....	15
1.8. Параметрическое уравнение прямой .....	15
1.9. Скалярное произведение (модульное определение) .....	16
1.10. Скалярное произведение (координатное определение) .....	17
1.11. Площадь параллелограмма на плоскости .....	18
1.12. Определитель второго порядка .....	19
1.13. Общее уравнение прямой на плоскости .....	21
1.14. Уравнение прямой в отрезках .....	24
1.15. Уравнение прямой с угловым коэффициентом .....	25
1.16. Угол между прямыми в точке пересечения .....	25
1.17. Уравнение биссектрисы угла между прямыми .....	26
1.18. Уравнение прямой по двум точкам на плоскости .....	27
1.19. Точка пересечения двух прямых .....	28
1.20. Расстояние от точки до прямой на плоскости .....	29
1.21. Уравнение прямой в полярной системе координат .....	30
1.22. Решение треугольников .....	31
1.23. Кривые второго порядка .....	38
1.24. Вопросы для самопроверки .....	45
Глава 2. Аналитическая геометрия в трехмерном пространстве .....	46
2.1. Система координат. Координаты точки .....	46
2.2. Координаты направленного отрезка .....	46
2.3. Длина вектора .....	47
2.4. Векторы общего вида .....	47
2.5. Арифметические действия с векторами .....	48
2.6. Базис ортогональной системы координат .....	48

2.7. Коллинеарные векторы .....	49
2.8. Параметрическое уравнение прямой .....	49
2.9. Скалярное произведение (модульное определение) .....	50
2.10. Скалярное произведение (координатное определение) .....	51
2.11. Площадь параллелограмма .....	52
2.12. Векторное произведение (модульное представление) .....	53
2.13. Векторное произведение (координатное представление) (Г.П. Конюхова) .....	54
2.14. Смешанное произведение трех векторов .....	55
2.15. Компланарные векторы .....	57
2.16. Общее уравнение плоскости. Виды уравнений плоскости.....	58
2.17. Расстояние от точки до плоскости .....	63
2.18. Параметрическое уравнение прямой, определяемой пересечением двух плоскостей .....	66
2.19. Нахождение точки пересечения трех непараллельных друг другу плоскостей .....	68
2.20. Правило Крамера решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными .....	71
2.21. Вопросы для самопроверки .....	73
Раздел II. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАТРИЦ (В. Р. Орел) .....	74
Глава 1. Общее определение матрицы .....	74
1.1. Матрица-строка и матрица-столбец .....	75
1.2. Квадратные матрицы .....	76
Глава 2. Действия с матрицами .....	77
2.1. Сложение матриц .....	77
2.2. Умножение матрицы на число .....	77
2.3. Алгебраическая сумма матриц .....	78
2.4. Скалярное произведение строки на столбец .....	78
2.5. Произведение матрицы на столбец .....	79
2.6. Умножение матрицы на матрицу .....	80
2.7. Перемножение квадратных матриц .....	81
2.8. Транспонирование матрицы .....	82
2.9. Геометрический смысл умножения матрицы на столбец .....	83
Глава 3. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) .....	84
3.1. Определители высоких порядков .....	87
3.2. Обратная матрица .....	90

3.3. Обратная матрица второго порядка .....	92
3.4. Решение СЛАУ с помощью обратной матрицы .....	93
3.5. Правило Крамера решения системы линейных уравнений ....	94
3.6. Решение СЛАУ с верхней треугольной матрицей системы ...	96
3.7. Решение СЛАУ с диагональной матрицей системы .....	97
3.8. Решение СЛАУ методом Жордана-Гаусса .....	98
3.9. Вопросы для самопроверки .....	102
 Раздел III. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ (В. Г. Конюхов, Г. П. Конюхова) .....	103
Глава 1. Понятие функции .....	103
1.1. Понятие функции. Способы задания функции .....	103
1.2. Основные свойства функций .....	105
1.2.1. Монотонность.....	105
1.2.2. Четность .....	106
1.2.3. Периодичность .....	107
1.3. Предел функции в точке .....	107
1.4. Бесконечно большие и бесконечно малые функции .....	109
1.5. Асимптоты к графикам функций .....	111
1.6. Непрерывность .....	112
1.7. Обратная функция .....	113
1.8. Сложная функция .....	114
1.9. Точки разрыва функции .....	115
1.10. Вопросы для самопроверки .....	116
 Глава 2. Производные и дифференциалы функций одной независимой переменной .....	117
2.1. Приращение аргумента и функции .....	117
2.2. Определение производной .....	118
2.3. Геометрический смысл производной .....	118
2.4. Физический смысл производной .....	119
2.5. Левая и правая производные .....	120
2.6. Понятие дифференцируемости .....	120
2.7. Понятие дифференциала функции .....	121
2.8. Формулы для производных некоторых функций .....	123
2.9. Правила дифференцирования функций .....	125
2.10. Производная обратной функции .....	126
2.11. Производная сложной функции .....	127

2.12. Дифференцирование функции, заданной параметрически .....	127
2.13. Дифференцирование неявной функции .....	128
2.14. Уравнения касательной и нормали .....	129
2.15. Производные высших порядков .....	130
2.16. Дифференциалы высших порядков .....	132
2.17. Ряд Тейлора .....	133
2.18. Вопросы для самопроверки .....	135
Глава 3. Исследование функции .....	135
3.1. Возрастание и убывание функции .....	135
3.2. Экстремум функции .....	137
3.3. Определение наибольшего и наименьшего значений функции .....	142
3.4. Выпуклость и вогнутость графика функции .....	144
3.5. Точки перегиба графика функции .....	145
3.6. Исследование графика функции .....	150
3.7. Вопросы для самопроверки .....	152
Глава 4. Неопределенный интеграл .....	153
4.1. Понятие первообразной функции .....	153
4.2. Неопределенный интеграл .....	154
4.3. Основные свойства неопределенного интеграла .....	156
4.4. Основные табличные интегралы .....	156
4.5. Основные методы интегрирования .....	157
4.5.1. Непосредственное интегрирование.....	157
4.5.2. Подведение функции под знак дифференциала .....	159
4.5.3. Замена переменной .....	160
4.5.4. Интегрирование по частям.....	161
4.6. Вопросы для самопроверки .....	163
Глава 5. Определенный интеграл .....	163
5.1. Понятие неопределенного интеграла .....	163
5.2. Геометрический и физический смысл определенного интеграла .....	164
5.3. Условия интегрируемости .....	166
5.4. Основные свойства определенного интеграла .....	167
5.5. Оценки определенного интеграла .....	168
5.6. Формула Ньютона – Лейбница .....	169

5.7. Методы вычисления определенных интегралов .....	170
5.7.1. Непосредственное интегрирование.....	170
5.7.2. Подведение функции под знак дифференциала .....	171
5.7.3. Замена переменной .....	171
5.7.4. Интегрирование по частям.....	172
5.8. Приложения определенного интеграла .....	173
5.9. Вопросы для самопроверки .....	176
Глава 6. Дифференциальные уравнения .....	177
6.1. Понятие дифференциального уравнения первого порядка .....	177
6.2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными .....	179
6.3. Однородные дифференциальные уравнения .....	182
6.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка .....	183
6.5. Дифференциальные уравнения высших порядков .....	186
6.6. Простейшие дифференциальные уравнения второго порядка .....	187
6.7. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами .....	188
6.8. Вопросы для самопроверки .....	190
Глава 7. Числовые ряды .....	190
7.1. Понятие числового ряда. Сходимость числового ряда .....	190
7.2. Критерии сходимости числового ряда .....	192
7.2.1. Критерий Коши сходимости ряда .....	192
7.2.2. Признаки сходимости и расходимости рядов с положительными членами .....	193
7.2.3. Признак сходимости знакочередующегося ряда (признак Лейбница).....	195
7.3. Абсолютно и условно сходящиеся ряды .....	196
7.4. Функциональные последовательности .....	197
7.5. Функциональные ряды .....	198
7.6. Степенные ряды .....	200
7.7. Вопросы для самопроверки .....	204

#### Раздел IV. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА (В. С. Маркарян)..... 205

Глава 1. Элементы теории вероятностей (соавтор В. Р. Орел) .....	205
1.1. Случайные события .....	205

1.1.1. Некоторые виды случайных событий .....	206
1.1.2. Свойства событий .....	207
1.2. Классическое определение вероятности случайного события .....	207
1.2.1. Основные свойства вероятности случайного события .....	209
1.2.2. Комбинаторные задачи на классическую вероятность .....	209
1.3. Элементы комбинаторики .....	209
1.4. Бином Ньютона .....	211
1.5. Повторяющиеся случайные события – схема Бернулли ....	214
1.6. Геометрическое определение вероятности .....	218
1.7. Статистическое определение вероятности случайного события .....	220
1.8. Свойства вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей случайных событий .....	222
1.9. Случайные величины .....	223
1.9.1. Дискретные случайные величины .....	224
1.9.2. Основные числовые характеристики дискретной случайной величины .....	225
1.9.3. Непрерывные случайные величины .....	228
1.9.4. Основные числовые характеристики непрерывной случайной величины .....	231
1.10. Равномерное распределение .....	233
1.11. Нормальное распределение .....	234
1.12. Вероятность попадания значения нормально распределённой случайной величины в заданный интервал .....	239
1.13. Случай интервала, симметричного относительно $\mu$ .....	240
1.14. Вопросы для самопроверки .....	240
Глава 2. Математическая статистика .....	241
2.1. Генеральная совокупность и выборка .....	241
2.2. Статистическое оценивание параметров. Точечные оценки .....	243
2.3. Интервальные оценки .....	245
2.4. Определение необходимого объёма выборки .....	248

2.5. Обработка результатов измерений по выборочным характеристикам распределения. Вариационные ряды .....	249
2.5.1. Графическое представление вариационного ряда .....	254
2.5.2. Аналитический анализ. Основные статистические характеристики ряда измерений .....	256
2.5.2.1. Характеристики положения .....	257
2.5.2.2. Характеристики рассеяния результатов измерений .....	258
2.5.2.3. Характеристики формы распределения .....	261
2.6. Анализ выпадающих данных .....	267
2.7. Проверка статистических гипотез .....	267
2.8. Некоторые специальные непрерывные распределения .....	269
2.8.1. Распределение $\chi^2$ (хи-квадрат) .....	269
2.8.2. $t$ -распределение Стьюдента .....	270
2.8.3. $F$ -распределение (распределение Фишера-Снедекора) .....	271
2.9. Проверка гипотез с помощью критериев, основанных на нормальном распределении .....	271
2.9.1. Проверка гипотезы о законе распределения. Критерий согласия $\chi^2$ .....	271
2.9.2. Сравнение двух выборочных средних арифметических независимых (несвязанных) выборок .....	276
2.9.3. Сравнение двух выборочных средних арифметических зависимых (связанных) выборок .....	279
2.9.4. Сравнение двух выборочных характеристик вариации и проверка гипотезы о равенстве дисперсий двух нормальных генеральных совокупностей .....	281
2.10. Корреляционный и регрессионный анализы .....	282
2.10.1. Корреляционная зависимость .....	282
2.10.2. Построение корреляционного поля .....	284
2.10.2.1. Определение формы связи .....	284
2.10.2.2. Направление взаимосвязи .....	285
2.10.2.3. Определение степени или тесноты взаимосвязи .....	286



2.10.3. Условное математическое ожидание. Функция регрессии.....	287
2.10.4. Корреляционный момент. Парный линейный коэффициент корреляции Бравэ-Пирсона $r$ .....	288
2.10.5. Достоверность коэффициента корреляции .....	291
2.10.6. Корреляционное отношение $\eta$ .....	294
2.11. Регрессионный анализ .....	295
2.11.1. Линейная регрессия .....	296
2.11.2. Расчёт коэффициентов уравнений линейной регрессии .....	296
2.11.3. Способ расчёта средней квадратической ошибки регрессионной зависимости и её роль в оценке надёжности уравнения регрессии .....	299
2.11.4. Множественная регрессия .....	300
2.12. Дисперсионный анализ .....	301
2.12.1. Однофакторный дисперсионный анализ .....	303
2.12.2. Дисперсионный анализ при корреляции данных .....	308
2.13. Непараметрическая статистика (В. В. Бритвина, Г. П. Конюхова) .....	312
2.13.1. Ранжирование .....	312
2.13.2. Критерий знаков .....	313
2.13.3. $T$ – критерий Вилкоксона .....	315
2.13.4. $Q$ -критерий Розенбаума .....	318
2.13.5. $U$ -Критерий Манна-Уитни .....	320
2.13.6. $\lambda$ – критерий Колмогорова-Смирнова .....	324
2.13.7. Критерий $\phi^*$ — угловое преобразование Фишера ...	328
2.13.8. Коэффициент ранговой корреляции $r_s$ Спирмена ...	333
2.13.9. Коэффициент корреляции Фехнера .....	338
2.13.10. Взаимосвязь между качественными признаками ...	340
2.14. Вопросы для самопроверки .....	341
Приложения .....	344
Приложение 1. Основные статистические таблицы .....	344
Приложение 2. Таблицы критических значений для непараметрических критериев .....	349
Библиографический список .....	364