УДК 517:9:539:3

НОВЫЙ ВАРИАНТ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ СОГЛАСОВАННОЙ МОДЕЛИ МАКСВЕЛЛОВСКОЙ ВЯЗКОСТИ

С. К. Годунов

Институт математики им. С. Л. Соболева, 630090 Новосибирск
E-mail: godunov@math.nsc.ru

Описана формализация эволюционных уравнений механики сплошной среды в виде галилеево-инвариантной недивергентной гиперболической системы. Особое внимание уделено пополнению системы дополнительными уравнениями, необходимыми для справедливости законов сохранения. Предложен новый вариант максвелловских релаксационных членов, не противоречащих дополнительным уравнениям и обеспечивающих калибровочную инвариантность.

Ключевые слова: производящий потенциал, гиперболичность, тензор Бюргерса, калибровочная инвариантность.

Введение. Эта статья продолжает цикл работ (см. [1–3]), посвященных термодинамически согласованным уравнениям, инвариантным относительно преобразований Галилея.

Термин “термодинамически согласованные” означает наличие совместного с уравнениями дивергентного равенства, правая часть которого неотрицательна, а если уравнения описывают диссипативный процесс, то строго положительна. Это равенство должно моделировать закон неубывания энтропии.

Обычно предполагается гиперболичность уравнений, описывающих поведение сплошных сред при отсутствии диссипативных процессов или если эти процессы носят бездиффузионный релаксационный характер. Законы сохранения количества движения и энергии, как правило, включаются в систему. Эти соображения кладутся в основу при выделении в качестве специального объекта математического изучения *гиперболических систем, составленных из законов сохранения.*

В работах [4, 5] изучалась такого рода схематизация для уравнений теории упругости с максвелловской релаксацией, моделирующей необратимые процессы пластической деформации. Во время подготовки книги [5] к ее английскому переводу [6] я заметил в ней (особенно в схематизации из заключительной главы, введенной лишь во второе издание — 1997 г.) некоторые неточности при осуществлении описанной выше программы составления гиперболических систем из законов сохранения. Срочность работы не позволила детально разобраться в причинах, вызвавших эти неточности. Поэтому, сократив последнюю главу, я подготовил для английского перевода “дополнение”, где попытался наметить пути устранения замеченных неточностей.

Сложилось впечатление, что начиная составление системы, описывающей интересующие нас процессы, надо сначала обеспечить ее гиперболичность. Иными словами, надо добиться того, чтобы при записи уравнений в квазилинейном виде матрицы коэффициентов оказались симметричными. (Коэффициенты при производных по времени t должны составлять положительно-определенную матрицу.) Для гиперболических уравнений корректно поставлена локальная задача Коши при достаточно гладких начальных данных.

Для описания релаксационных диссипативных процессов используются специальные правые части уравнений, но вводить их можно далеко не во все уравнения системы. *Неко-*

торые из уравнений должны иметь правые части нулевыми, так как только при выполнении этого требования удается обеспечить выполнение на решениях законов сохранения энергии и количества движения. Дивергентные равенства, описывающие эти законы, в систему не включаются и оказываются *выполненными не на всех ее решениях,* а только на тех, которые отвечают начальным данным, подчиненным *дополнительным условиям,* в виде некоторых равенств.

Реализация намеченного в указанном "дополнении" подхода требует пересмотреть выработанные нами ранее модели вязкоупругих деформаций. В частности, нужно более внимательно отнестись к выбору уравнений, в которые включаются максвелловские релаксационные члены. В настоящей работе как раз и описываются приемы, позволяющие сконструировать вязкоупругую модель с учетом сделанных выше замечаний.

В п. **1** мы напоминаем нужные нам сведения из статей [1, 2] о галилеево-инвариантных гиперболических системах и приводим несколько сравнительно несложных систем, которые послужат деталями для дальнейших построений.

В п. **2** показывается, как эти детали могут быть объединены в составные гиперболические системы, совместные с законами сохранения. Приводимые системы удовлетворяют поставленным выше математическим требованиям.

Конечно, использование конструируемых уравнений для моделирования поведения тех или иных сред требует детальных физических исследований по выбору уравнений состояния и законов диссипации, а также проведения вычислительных и натурных экспериментов. Мы лишь предлагаем возможную математическую схему, в которую можно облекать результаты изучения конкретных сред.

Нужно отметить, что таким изучением активно и очень успешно занимаются механики в Томске под руководством академика В. Е. Панина. Созданная им и его сотрудниками Ю. В. Гриняевым, Н. В. Чертовой и др. полевая теория дефектов на мезоуровне (см. [7–9]) основана на тонких экспериментах. Эта теория, по-видимому, приводит к уравнениям, которые можно включить в описываемую нами абстрактную схему.

Широко используемая последнее время калибровочная инвариантность уравнений (см. [10–12]), связывающих микроскопические дефекты с напряжениями, нашла в проводимых ниже построениях свое отражение. Рассматривая геометрические и "эффективные упругие" деформации, восстановленные по полю напряжений, мы связываем неупругую часть напряжений не с различием самих геометрических и эффективных деформаций, а с тензором Бюргерса последних, для которых эффективные деформации являются потенциалами. Возможность неоднозначного выбора этих потенциалов не влияет на напряжения, что и означает *калибровочную инвариантность.* Указанные выше недостатки наших предыдущих работ как раз и возникли из-за того, что в них калибровочная инвариантность не была обеспечена.

В заключительном п. **3** кратно описываются еще два математически непротиворечивых варианта моделирования неупругих процессов. Один из них основан на явлении "сверхтекучести", использовавшемся В. Н. Доровским (см. [13, 14]), а другой возник у автора в процессе продумывания вариантов, свободных от противоречий, о которых шла речь выше. Он был кратко описан в [15, 16].

1. Примеры гиперболических уравнений, совместных с дополнительными законами сохранения. Описывая нужные нам гиперболические системы, сначала приведем список "деталей", из которых они собираются.

В [1] было показано, что уравнения следующего дивергентного вида ($i, k = 1, 2, 3$, u_k — компоненты скорости)

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{q_0}}{\partial x_k} = 0,$$

$$\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{u_i}}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial L_{p_j}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{p_j}}{\partial x_k} = 0$$

являются галилеево-инвариантными, если производящий потенциал

$$L = L(q_0 - u_i u_i/2, p_1, p_2, \dots)$$

инвариантен относительно вращений. При этом предполагается, что вектор, составленный из компонент p_j, при вращениях преобразуется по какому-либо представлению группы $SO(3)$ (или $SU(2)$). Впоследствии оказалось [3], что вводя вместо q_0 несколько неизвестных q_1, $q_2, \dots, q_m$ с аналогичной зависимостью от них производящего потенциала

$$L = L(q_1 - u_i u_i/2, q_2 - u_i u_i/2, \dots, q_m - u_i u_i/2, p_1, p_2, \dots),$$

мы также можем построить галилеево-инвариантную систему из уравнений

$$\frac{\partial L_{q_l}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{q_l}}{\partial x_k} = 0,$$

$$\frac{\partial L_{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{u_i}}{\partial x_k} = 0, \qquad \frac{\partial L_{p_j}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{p_j}}{\partial x_k} = 0.$$

В работе [3] роль таких q_l играли химические потенциалы различных веществ или фаз, из которых состоит элемент среды. При этом L_{q_l} оказывались парциальными плотностями составляющих, а полная плотность среды ρ выражалась в виде суммы $\rho = \sum\limits_l L_{q_l}$.

Без труда проверяется, что квазилинейная запись

$$L_{r_i r_j} \frac{\partial r_j}{\partial t} + M^{(k)}_{r_i r_j} \frac{\partial p_j}{\partial x_k} = 0$$

уравнений используемого нами вида

$$\frac{\partial L_{r_i}}{\partial t} + \frac{\partial M^{(k)}_{r_i}}{\partial x_k} = 0$$

имеет симметрические матрицы коэффициентов. Если L — выпуклая функция своих аргументов, т. е. если $L_{r_i r_j}$ образуют положительно-определенную матрицу, то рассматриваемые уравнения — симметрические гиперболические по определению Фридрихса.

Конструирование более сложных галилеево-инвариантных систем (см. [2]) осуществляется добавлением в приведенные записи уравнений дополнительных слагаемых, содержащих только пространственные производные неизвестных функций. Коэффициенты в этих дополнительных слагаемых определяются по производящему потенциалу L. Добавленные слагаемые обязательно должны быть инвариантными относительно вращений координатной системы. При выполнении этого условия галилеева инвариантность будет обеспечена.

Приведем несколько возможных примеров сконструированных описанным способом систем уравнений и попутно сформулируем еще некоторые ограничения на них. Это ограничения, которые возникают при обеспечении совместности уравнений с дополнительными соотношениями, необходимыми для справедливости выполнения законов сохранения количества движения и энергии.

Первый пример, который можно использовать в виде канонической формы уравнений магнитной гидродинамики, выглядит так ($L = L(q_0 + u_i u_i/2, r_i r_i)$, $i, k = 1, 2, 3$):

$$\frac{\partial L_{q_0}}{\partial t} + \frac{\partial (u_k L)_{q_0}}{\partial x_k} = 0; \tag{1.1a}$$