

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.161.5
Г16

Рецензенты: *С.А. Агафонов, В.А. Гречихин*

Галкин С.В.
Г16 Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление: учеб. пособие для вузов / С.В. Галкин. — М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. — 240 с. : ил.

Рассмотрены два раздела общего курса математики для технических университетов: «Теория функций комплексного переменного» и «Операционное исчисление», а также теория числовых рядов, теория поля, ряды Фурье и преобразование Фурье.

Приведены основные понятия и теоремы, доказательства теорем, примеры.

Для студентов 1–4-го курсов МГТУ им. Н.Э. Баумана всех факультетов.

УДК 517.5(075.8)
ББК 22.161.5

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
1. Элементы теории аналитических функций.....	6
1.1. Комплексные числа и операции над ними.....	6
1.1.1. Три формы записи комплексных чисел.....	6
1.1.2. Операции над комплексными числами.....	8
1.2. Множества на комплексной плоскости.....	12
1.2.1. Геометрическая интерпретация.....	12
1.2.2. Открытые и замкнутые множества.....	15
1.2.3. Бесконечно удаленная точка.....	16
1.2.4. Односвязное множество.....	17
1.3. Функции комплексного переменного.....	17
1.3.1. Предел последовательности.....	17
1.3.2. Элементарные функции комплексного переменного.....	19
1.3.3. Предел и непрерывность функции комплексного переменного.....	23
1.3.4. Отображения посредством элементарных функций.....	24
1.4. Производная функции и аналитичность.....	25
1.4.1. Производная и дифференциал.....	25
1.4.2. Условия Коши – Римана.....	31
1.4.3. Аналитичность функции.....	21
1.4.4. Геометрический смысл аргумента и модуля производной аналитической функции.....	32
1.4.5. Задача о восстановлении аналитической функции по ее действительной или мнимой части.....	34
1.5. Интеграл от функции комплексного переменного.....	38
1.5.1. Определение интеграла.....	38
1.5.2. Свойства интеграла.....	40
1.5.3. Три формы записи интеграла.....	42
1.6. Основные теоремы об интегралах.....	45
1.6.1. Интегральная теорема Коши (для односвязной области)...	45
1.6.2. Вычисление интеграла $\oint_{\gamma} \frac{dz}{(z - z_0)^n}$	47

1.6.3. Интегральная теорема Коши для многосвязной области	49
1.6.4. Теорема Мореры	50
1.6.5. Интеграл с переменным верхним пределом	52
1.6.6. Формула Ньютона – Лейбница	55
1.6.7. Интегральная формула Коши	56
2. Ряды в комплексной области	60
2.1. Числовые и степенные ряды.....	60
2.1.1. Сходимость числовых рядов.....	60
2.1.2. Поточечная сходимость функциональных рядов.....	63
2.1.3. Равномерная сходимость функциональных рядов.....	66
2.1.4. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.....	67
2.1.5. Сходимость степенных рядов	71
2.1.6. Определение радиуса сходимости степенного ряда	73
2.1.7. Сходимость степенного ряда на границе круга сходимости	75
2.2. Теоремы Тейлора и Лорана	76
2.2.1. Ряд Тейлора	76
2.2.2. Разложения в ряд Маклорена основных элементарных функций	78
2.2.3. Теорема Тейлора о разложении аналитической функции в степенной ряд	79
2.2.4. Неравенства Коши	82
2.2.5. Ряд Лорана	82
2.2.6. Теорема Лорана.....	83
2.3. Особые точки функций комплексного переменного	88
2.3.1. Правильная точка	88
2.3.2. Полюсы и нули функции	90
2.3.3. Существенно особая точка.....	95
2.3.4. Классификация особой точки функции по ее разложению в ряд Лорана в окрестности этой точки	98
2.3.5. Классификация бесконечно удаленной особой точки функции по ее разложению в ряд Лорана в окрестности этой точки	98
3. Вычеты и их применение к вычислению интегралов	101
3.1. Определения вычета.....	101
3.2. Вычисление вычетов в точке конечной плоскости	101
3.3. Общая теорема Коши о вычетах	105
3.4. Применение вычетов для вычисления несобственных интегралов.....	110
4. Обобщения и приложения	114
4.1. Применение комплексных чисел	114
4.2. Обобщения комплексных чисел. Кватернионы и кентавры.....	115

5. Основные теоремы операционного исчисления	119
5.1. Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение.....	119
5.1.1. Условия, которым должен удовлетворять оригинал	119
5.1.2. Теорема об области существования изображения	120
5.2. Теоремы линейности, подобия, смещения.....	122
5.3. Теоремы о дифференцировании и об интегрировании.....	126
5.3.1. Теорема о дифференцировании оригинала.....	126
5.3.2. Теоремы о начальном и конечном значениях	127
5.3.3. Теоремы об интегрировании оригинала, о дифферен- цировании и интегрировании изображения.....	128
5.4. Свертка оригиналов, интеграл Дюамеля	131
5.4.1. Свертка и ее свойства	131
5.4.2. Теорема о свертке (теорема о произведении изображений)	132
5.4.3. Интеграл Дюамеля	133
5.5. Теорема запаздывания и ее применение	134
5.5.1. Теорема запаздывания	134
5.5.2. Изображение периодической функции.....	134
5.5.3. Изображения элементарных импульсов	136
6. Теоремы разложения и вычисление оригиналов.....	138
6.1. Достаточные условия изображения.....	138
6.2. Связь преобразований Лапласа и Фурье	138
6.3. Теорема обращения	139
6.4. Лемма Жордана	140
6.5. Теоремы разложения.....	140
7. Решение дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами.....	143
7.1. Решение дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом операционного исчисления.....	143
7.2. Решение дифференциальных уравнений с помощью интеграла Дюамеля	146
Приложения	151
П1. Числовые ряды в действительной области	151
П1.1. Сходимость ряда, общие признаки сходимости	151
П1.2. Общие свойства сходящихся рядов	153
П1.3. Признаки сходимости знакоположительных рядов	155
П1.3.1. Интегральный признак Коши.....	156
П1.3.2. Признаки сравнения знакоположительных рядов.....	159
П1.3.3. Признак Даламбера.....	162
П1.3.4. Радиальный признак Коши.....	166
П1.3.5. Перестановка местами членов ряда в сходящихся знакоположительных рядах	168
П1.3.6. Общие признаки сходимости	168

П1.4. Признаки сходимости знакопеременных рядов.....	170
П1.4.1. Абсолютная и условная сходимость	170
П1.4.2. Перестановка членов в абсолютно сходящихся рядах	171
П1.4.3. Теоремы о структуре знакопеременных рядов.....	172
П1.4.4. Перестановка членов в знакопеременных рядах.....	175
П1.5. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница.....	176
П1.6. Методика исследования сходимости числовых рядов.....	178
П2. Скалярные и векторные поля	180
П2.1. Характеристики скалярных и векторных полей	180
П2.1.1. Характеристики скалярных полей.....	180
П2.1.2. Характеристики векторных полей.....	182
П2.2. Формула Грина	183
П2.3. Формула Остроградского – Гаусса	185
П2.4. Дивергенция и ее свойства	188
П2.5. Соленоидальное поле и его свойства.....	190
П2.6. Ротор векторного поля и его свойства.....	192
П2.7. Теорема Стокса.....	194
П2.8. Инвариантное определение ротора и смысл ротора.....	197
П2.9. Теорема о полном дифференциале для пространственной кривой.....	199
П2.10. Потенциальное поле и его свойства.....	203
П2.11. Дифференциальные операции второго порядка	205
П2.12. Гармоническое поле и его свойства.....	206
П3. Ряды Фурье и преобразование Фурье	208
П3.1. Задача о наилучшем приближении, коэффициенты Фурье ...	208
П3.1.1. Задача о наилучшем приближении в R^n	208
П3.1.2. Задача о наилучшем приближении в гильбертовом пространстве H	209
П3.2. Разложение в тригонометрический ряд Фурье функций, заданных на отрезке $[-\pi, \pi]$	214
П3.3. Условия Дирихле и теорема Дирихле.....	217
П3.4. Связь между гладкостью функции и порядком малости коэффициентов Фурье	218
П3.5. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на отрезке $[-l, l]$	221
П3.6. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций	224
П3.7. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на отрезке $[0, l]$, по синусам и косинусам кратных дуг.....	226
П3.8. Комплексная форма ряда Фурье.	228
П3.9. Интеграл Фурье	229
П3.10. Косинус- и синус-преобразование Фурье.....	231
П3.11. Преобразование Фурье.....	232
Литература.....	235