

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
“ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ”  
(ФГБОУ ВПО «ВГУ»)

**Метод интегральных преобразований в задачах  
математической физики**

**Учебно-методическое пособие для вузов**

Составитель: Ю.Б. Савченко,  
С.А. Ткачева

Воронеж

2014

## 1. Метод интегральных преобразований.

Для решения задач математической физики с непрерывным спектром может быть использован метод интегральных преобразований. Под интегральным преобразованием функции  $f(x)$  понимается значение определенного интеграла, взятого по заданному промежутку от произведения  $f(x)$  на ядро преобразования, представляющее собой функцию переменной  $x$  и некоторого параметра, который может принимать произвольные значения в заданной вещественной или комплексной области.

Интегральные преобразования, встречающиеся в математической физике, могут быть условно разделены на «вещественные» и «комплексные» в зависимости от значений, принимаемых параметром преобразования.

Пусть задана некоторая функция  $K(x, v)$ , где  $a < x < \infty, b < v < \infty$ . Будем предполагать эту функцию непрерывной от  $x$  и  $v$  в указанной области. Пусть  $f(x) \in A$  - функция вещественной переменной ( $A$  – некоторый класс функций). Если для каждой функции класса  $A$  интеграл

$$F(v) = \int_a^\infty K(x, v)f(x)dx \quad (1)$$

сходится, то в этом случае говорят, что определено *интегральное преобразование*  $F(v)$  от функции  $f(x)$  на классе  $A$ . При этом функция  $K(x, v)$  называется ядром интегрального преобразования.

Во многих случаях существует обратная зависимость для (1). Она имеет вид:

$$f(x) = \int_b^\infty M(x, v)F(v)dv. \quad (2)$$

Функция  $M(x, v)$  называется ядром обратного преобразования. Формула (2) – обращение преобразования (1). Конкретная структура ядра  $M(x, v)$  зависит от ядра  $K(x, v)$  и пределов изменения переменных. Как правило, формула (2) имеет место в некотором классе  $B$  (не на всем классе  $A: B \subset A$ ), то есть  $f(x) \in B$ . Обе формулы (1) и (2) можно объединить в одну:

$$f(x) = \int_b^\infty M(x, v)dv \int_a^\infty K(y, v)f(y)dy, f(x) \in B \quad (3)$$

Формула (3) – разложение функции  $f(x)$  по функциям  $M(x, v)$ . Часто случается, что формулы (1) и (2) взаимны.

*Синус-преобразование Фурье:*

интегрированию уравнения в частных производных, содержащих на единицу меньше независимых переменных, чем заданное уравнение. Если исходное уравнение с двумя независимыми переменными, то применение интегрального преобразования сводит задачу к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения.

### Преобразование Фурье.

Ввиду большой важности интегрального преобразования Фурье напомним здесь некоторые основные свойства этого преобразования.

Пусть  $f(x)$  - произвольная функция, определенная на интервале  $(-\infty; +\infty)$  и удовлетворяющая следующим условиям:

- 1)  $f(x)$  - кусочно-непрерывная на  $(-\infty; +\infty)$ .
- 2)  $f(x)$  абсолютно интегрируемая на всей числовой оси.

Будем говорить, что тогда  $f(x) \in A$ . При таких условиях функция  $f(x)$  может быть представлена в виде разложения в интеграл Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} ds \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\xi} d\xi, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Причем в точке разрыва первого рода  $x = c$  левая часть формулы должна быть заменена полусуммой  $[f(c-0) + f(c+0)]/2$ .

Преобразованием Фурье от функции  $f(x)$  называется интеграл:

$$f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx} dx, \quad -\infty < s < +\infty.$$

Для функций, удовлетворяющих перечисленным условиям, преобразование Фурье всегда существует. Действительно, интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\beta} f(x) e^{isx} dx,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  - любые конечные числа, когда существует (интеграл Римана). Поэтому интеграл Фурье сходится.

Преобразование Фурье обладает следующими свойствами.

Если  $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ , где функции  $f_1(x), f_2(x) \in A$ , а  $c_1$  и  $c_2$  – константы, то  $\hat{f}(s) = c_1 \hat{f}_1(s) + c_2 \hat{f}_2(s)$  (свойство линейности преобразования Фурье).

Сверткой двух функций  $f_1(x), f_2(x) \in A$  называется функция, определяемая по формуле:  $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) f_2(x-y) dy = \{f_1, f_2\}$ ; причем свертка коммутативна, то есть  $\{f_1, f_2\} = \{f_2, f_1\}$ . Справедлива формула  $\hat{f}(s) = \hat{f}_1(s) \hat{f}_2(s)$ ,  $\hat{f}(s) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow \pm\infty$ .

Имеет место формула обращения, которая справедлива для функций  $f(x) \in B$ , удовлетворяющих условиям:

- 1)  $f(x)$  – кусочно-непрерывна и имеет конечное число максимумов и минимумов в любом замкнутом промежутке  $[a; b] \subset (-\infty; +\infty)$ .
- 2)  $f(x)$  абсолютно интегрируема на всей числовой оси, то есть  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  имеет конечное значение.

Формула обращения имеет вид (в точках непрерывности)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{-isx} ds, -\infty < x < +\infty.$$

## 2. Определение преобразования Лапласа. Оригинал и изображение.

Пусть  $f[t]$  – интегрируемая на  $(0, T)$  при любом  $T > 0$  функция, равная нулю при  $t > 0$ :  $f[t] = 0$  при  $t < 0$ . Если эта функция при  $t > 0$  удовлетворяет оценке

$$|f[t]| \leq C e^{at}, C > 0, a \geq 0, t > 0, \quad (1.1)$$

то можно рассмотреть интеграл

$$F[p] = \int_0^{\infty} f[t] e^{-pt} dt, p = \sigma + i\xi, \sigma > a, \xi \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Действительно, справедлива оценка

$$|F[p]| \leq \int_0^{\infty} |f[t]| e^{-\sigma t} dt = \int_0^{\infty} |f[t] e^{-at}| e^{-(\sigma-a)t} dt \leq C \int_0^{\infty} e^{-(\sigma-a)t} dt = \frac{C}{(\sigma-a)} < \infty. \quad (1.3)$$

При выводе (1.3) была использована оценка (1.1). Из оценки (1.3), в частности, следует, что  $|F[p]| < \infty$  при  $\sigma = \text{Re } p > a$ .

Функция  $F[p]$  является аналитической функцией комплексной переменной  $p$  в плоскости  $\text{Re } p > a$ . Для того чтобы это проверить, находим пока формально

$$\frac{dF}{dp} = \int_0^{\infty} f[t] (-t) e^{-pt} dt. \quad (1.4)$$

Как и при выводе (1.3), находим

$$\left| \frac{dF[p]}{dp} \right| \leq \int_0^{\infty} |f[t] e^{-at}| t e^{-(\sigma-a)t} dt \leq C \int_0^{\infty} t e^{-(\sigma-a)t} dt = \frac{-C}{(\sigma-a)} \int_0^{\infty} \partial_t e^{-(\sigma-a)t} dt = \frac{-C}{(\sigma-a)} (t e^{-(\sigma-a)t} - e^{-(\sigma-a)t}) \Big|_0^{\infty} = \frac{C}{(\sigma-a)^2}.$$

Последнее означает, что интеграл равномерно по  $\text{Re } p > a$  сходится и, следовательно, производная  $\frac{dF[p]}{dp}$  существует при  $\text{Re } p > a$ , и формула (1.4) справедлива при  $\text{Re } p > a$ .

Интеграл (1.2) называется преобразование Лапласа функции  $f[t]$  и обозначается  $\mathcal{L}[f]$ . В этом случае функция  $f[t]$  называется оригиналом, а функция  $\mathcal{L}[f] = F[p]$  — изображением.

Преобразование Лапласа можно связать с преобразованием Фурье. Действительно, из (1.2) имеем  $\mathcal{L}[f][p] = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+i\xi)t} dt = \int_0^{\infty} (f[t] e^{-\sigma t}) e^{-i\xi t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g[t] e^{-i\xi t} dt$ , где  $g[t] = f[t] e^{-\sigma t}$  при  $t \geq 0$  и  $g[t] = 0$  при  $t < 0$  (преобразование Фурье берётся со знаком -).

В дальнейшем все приводимые в тексте примеры будут отмечаться знаком "■".