ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
ПОВОЛЖСКИЙ РЕГИОН

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

№ 2 (10) 2009

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

УДК 519.718

В. В. Чугунова

ОБ ОДНОМ МНОЖЕСТВЕ ФУНКЦИЙ

Аннотация. Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в базисах, содержащих функцию $h(x_1, ..., x_{2k+1})$ множества H_{2k+1}. Предполагается, что базисные элементы независимо друг от друга с вероятностью ε ($\varepsilon \in (0; 1/2)$) подвержены инверсным неисправностям на входах элементов. В работе показано: 1) в произвольном конечном полном базисе B, содержащем функцию $h(x_1, ..., x_{2k+1})$ множества H_{2k+1}, все булевы функции можно реализовать схемами с ненадежностью не более $a\varepsilon^{k+1} + \varepsilon^{k+2}$ при $\varepsilon \le \dfrac{1}{48am^2(2k+1)}$, где $a = C_{2k+1}^{k+1}$, m – наибольшее число входов элементов в полном конечном базисе B; 2) в базисе $\tilde{B}$, содержащем все функции, зависящие не более чем от двух переменных, и функцию $h(x_1, ..., x_{2k+1}) \in H_{2k+1}$, функции 0, 1, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можно реализовать абсолютно надежно, а все остальные функции можно реализовать асимптотически оптимальными по надежности схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) равной $a\varepsilon^{k+1}$, где $a = C_{2k+1}^{k+1}$.

Ключевые слова: булевы функции, синтез, асимптотически оптимальные по надежности схемы.

stract. The realization of Boolean functions with circuits of unreliable functional ements in bases, contained the function $h(x_1, ..., x_{2k+1})$ from set H_{2k+1} is consided. The basis elements are supposed to be prone to inverse faults on element inputs dependently from each other with the probability ($\varepsilon \in (0; 1/2)$). I this work there are demonstrated: 1) in arbitrary finite full basis B, contained function $h(x_1, ..., x_{2k+1})$ of set H_{2k+1}, all Boolean functions are possible to realize with circuits with reliability at most $a\varepsilon^{k+1} + \varepsilon^{k+2}$ at $\varepsilon \le \dfrac{1}{48am^2(2k+1)}$, where $a = C_{2k+1}^{k+1}$, m is the greatest number of element inputs in finite full basis B; 2) in basis $\tilde{B}$, contained all functions, depended at most on two variables, and the function $h(x_1, ..., x_{2k+1}) \in H_{2k+1}$, functions are possible to realize with asymptotically optimal on reliability circuits, worked with unreliability, asymptotically equal to aεk+1 (at $\varepsilon \to 0$), where a = C_{2k+1}^{k+1}.

Keywords: boolean functions, asymptotically optimal reliable circuits.

Впервые задачу синтеза надежных схем из ненадежных элементов рассматривал Дж. фон Нейман [1]. Он предполагал, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью ε ($\varepsilon < 1/2$) подвержены инверсным неисправностям на выходах, когда функциональный элемент с приписанной ему булевой функцией $e(\tilde{x})$ в неисправном состоянии реализует $\overline{e}(\tilde{x})$.

ŋqdqдуеҮ ЬӺ dəqӺЬҮзе d ɛɑɑɛɑҹ Jqdqүqүè

Для повышения надежности схем Дж. фон Нейман использовал схему, реализующую функцию голосования $g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$. Позднее М. А. Алехина и С. И. Аксенов ввели в рассмотрение новые классы функций, корректирующих ошибки: $G_1 = \{x_1^{\delta_1}x_2^{\delta_2} \vee x_1^{\delta_1}x_3^{\delta_3} \vee x_2^{\delta_2}x_3^{\delta_3}\}$, $G_2 = \{x_1^{\delta_1}x_2^{\delta_2} \vee \vee\, x_3^{\delta_3}x_4^{\delta_4}\}$, $G_3 = \{(x_1^{\delta_1} \vee x_2^{\delta_2})\&(x_3^{\delta_3} \vee x_4^{\delta_4})\}$ (где $\delta_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, 3, 4$).

С. И. Аксенов показал [2], что при инверсных неисправностях на выходах элементов наличие любой из функций множества $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$ в заданном полном базисе Б гарантирует реализацию произвольной булевой функции схемой, функционирующей с вероятностью ошибки не больше $\varepsilon + c\varepsilon^2$, где $\varepsilon \le d$, c, d – некоторые положительные константы.

В работе [3] М. А. Алехина ввела новый класс функций M_k, повышающих надежность схем, и доказала для него теорему 1. Множество M_k – множество всех булевых функций $m(x_1, ..., x_k)$ $(k \ge 3)$, обладающих свойством: найдется такой набор $(b_1, ..., b_k)$, что на нем и всех соседних с ним наборах функция $m(x_1, ..., x_k)$ принимает значение 0, а на наборе $(\bar{b}_1, ..., \bar{b}_k)$ и всех соседних с ним наборах – значение 1. Наборы $(b_1, ..., b_k)$ и $(\bar{b}_1, ..., \bar{b}_k)$ называются характеристическими наборами функции $m(x_1, ..., x_k)$.

Теорема 1 [3]. Пусть $f(x_1, ..., x_n)$ – произвольная булева функция, а S – схема, ее реализующая с ненадежностью $P(S) \le p$. Пусть схема S_m реализует функцию $m(x_1, ..., x_k) \in M_k$ и $P(S_m) \le p$. Обозначим v^1 и v^0 – вероятности ошибок схемы S_m на характеристических наборах. Тогда функцию $f(x_1, ..., x_n)$ можно реализовать такой схемой $\phi(S)$, что $P(\phi(S)) \le \max\{v^1, v^0\} + cp^2$, где положительная константа $c \le kC_k^{[k/2]}$.

Следствие 1. Пусть полный базис Б содержит функцию $m(x_1, ..., x_k) \in M_k$, а функциональные элементы с вероятностью ε подвержены инверсным неисправностям на выходах. Пусть $f(x_1, ..., x_n)$ – произвольная булева функция, а S – схема, реализующая ее с ненадежностью $P(S) \le s\varepsilon$ (s – положительная константа). Тогда функцию $f(x_1, ..., x_n)$ можно реализовать такой схемой A над Б, что $P(A) \le \varepsilon + c\varepsilon^2$ (положительная константа $c \le kC_k^{[k/2]}s^2$).

Из рассмотренных выше результатов следует, что существуют такие булевы функции, наличие которых в рассматриваемом базисе при инверсных неисправностях на выходах позволяет реализовать почти все булевы функции асимптотически оптимальными по надежности схемами с ненадежностью ε (при $\varepsilon \to 0$).

Пусть функциональные элементы подвержены инверсным неисправностям на входах. Эти неисправности характеризуются тем, что поступающее на каждый вход элемента значение a ($a \in \{0, 1\}$) с вероятностью ε $(0 < \varepsilon < 1/2)$ может превратиться в значение $\bar{a}$. Очевидно, что при инверсных неисправностях на входах с увеличением t – числа входов каждого элемента базиса Б, его ненадежность увеличивается до $t\varepsilon$. Возникает вопрос: можно ли при инверсных неисправностях на входах элементов реализовать произвольную бу-