

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
ПОВОЛЖСКИЙ РЕГИОН

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

№ 2 (10)

2009

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Чугунова В. В. Об одном множестве функций	2
Миронов Д. А. Применение суперкомпьютерных вычислительных сред для решения объемного сингулярного интегрального уравнения задачи дифракции на диэлектрическом теле	14
Бойков И. В., Кучумов Е. В. Об одном итерационном методе решения интегральных уравнений Вольтерра	25
Долгарев А. И., Долгарев И. А. Некоторые приложения галилеевых методов	39
Алехина М. А., Зиновьева С. М. Синтез асимптотически оптимальных по надежности неветвящихся программ в базисе $\{x_1 \vee x_2, x_1 \& x_2, \bar{x}_1, stop\}$	60
Долгарев И. А. Получение поверхностей одулярного галилеева пространства с сибсоном по коэффициентам их квадратичных форм	68
Валовик Д. В., Смирнов Ю. Г. Аналитическое продолжение функции Грина для уравнения Гельмгольца в слое	83

ФИЗИКА

Голованов О. А., Макеева Г. С., Савченкова М. В. Вычислительный алгоритм определения дескрипторов автономных блоков с магнитными нановключениями и каналами Флоке	91
Макеева Г. С., Голованов О. А., Савченкова М. В. Электродинамический расчет ферромагнитного резонанса в магнитных композитных наноматериалах на основе решеток ферромагнитных наносфер	102
Амелин И. И. Роль различных поверхностей монокристалла CuO в сверхпроводимости интерфейса CuO–Cu	110
Тимофеев В. Ю., Зайцев А. А. Моделирование тепловых полей в сложных динамических системах средствами САПР	115
Жуковский В. Ч., Горшков О. Н., Кревчик В. Д., Семенов М. Б., Смирнов Ю. Г., Чупрунов Е. В., Рудин В. А., Скибицкая Н. Ю., Кревчик П. В., Филатов Д. О., Антонов Д. А., Лапина М. А., Шенина М. Е., Ямамото К. Особенности двумерных туннельных бифуркаций в условиях внешнего электрического поля	123
Довыденков В. А., Ярмолык М. В., Бувев А. Р., Леухин А. В., Сазонов А. Р. Нанокристаллические материалы с термически устойчивой структурой	136

ОБ ОДНОМ МНОЖЕСТВЕ ФУНКЦИЙ

Аннотация. Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в базисах, содержащих функцию $h(x_1, \dots, x_{2k+1})$ множества H_{2k+1} . Предполагается, что базисные элементы независимо друг от друга с вероятностью ϵ ($\epsilon \in (0; 1/2)$) подвержены инверсным неисправностям на входах элементов. В работе показано: 1) в произвольном конечном полном базисе B , содержащем функцию $h(x_1, \dots, x_{2k+1})$ множества H_{2k+1} , все булевы функции можно реализовать схемами с ненадежностью не более $a\epsilon^{k+1} + \epsilon^{k+2}$ при $\epsilon \leq \frac{1}{48am^2(2k+1)}$, где $a = C_{2k+1}^{k+1}$, m – наибольшее число входов элементов

в полном конечном базисе B ; 2) в базисе \tilde{B} , содержащем все функции, зависящие не более чем от двух переменных, и функцию $h(x_1, \dots, x_{2k+1}) \in H_{2k+1}$, функции $0, 1, x_1, x_2, \dots, x_n$ можно реализовать абсолютно надежно, а все остальные функции можно реализовать асимптотически оптимальными по надежности схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически (при $\epsilon \rightarrow 0$) равной $a\epsilon^{k+1}$, где $a = C_{2k+1}^{k+1}$.

Ключевые слова: булевы функции, синтез, асимптотически оптимальные по надежности схемы.

Abstract. The realization of Boolean functions with circuits of unreliable functional elements in bases, contained the function $h(x_1, \dots, x_{2k+1})$ from set H_{2k+1} is considered. The basis elements are supposed to be prone to inverse faults on element inputs independently from each other with the probability ($\epsilon \in (0; 1/2)$). In this work there are demonstrated: 1) in arbitrary finite full basis B , contained function $h(x_1, \dots, x_{2k+1})$ of set H_{2k+1} , all Boolean functions are possible to realize with circuits with reliability at most $a\epsilon^{k+1} + \epsilon^{k+2}$ at $\epsilon \leq \frac{1}{48am^2(2k+1)}$, where $a = C_{2k+1}^{k+1}$, m is the greatest

number of element inputs in finite full basis B ; 2) in basis \tilde{B} , contained all functions, depended at most on two variables, and the function $h(x_1, \dots, x_{2k+1}) \in H_{2k+1}$, functions are possible to realize with asymptotically optimal on reliability circuits, worked with unreliability, asymptotically equal to $a\epsilon^{k+1}$ (at $\epsilon \rightarrow 0$), where $a = C_{2k+1}^{k+1}$.

Keywords: boolean functions, asymptotically optimal reliable circuits.

Впервые задачу синтеза надежных схем из ненадежных элементов рассматривал Дж. фон Нейман [1]. Он предполагал, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью ϵ ($\epsilon < 1/2$) подвержены инверсным неисправностям на выходах, когда функциональный элемент с приписанной ему булевой функцией $e(\tilde{x})$ в неисправном состоянии реализует $\bar{e}(\tilde{x})$.

Для повышения надежности схем Дж. фон Нейман использовал схему, реализующую функцию голосования $g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$. Позднее М. А. Алехина и С. И. Аксенов ввели в рассмотрение новые классы функций, корректирующих ошибки: $G_1 = \{x_1^{\delta_1}x_2^{\delta_2} \vee x_1^{\delta_1}x_3^{\delta_3} \vee x_2^{\delta_2}x_3^{\delta_3}\}$, $G_2 = \{x_1^{\delta_1}x_2^{\delta_2} \vee x_3^{\delta_3}x_4^{\delta_4}\}$, $G_3 = \{(x_1^{\delta_1} \vee x_2^{\delta_2}) \& (x_3^{\delta_3} \vee x_4^{\delta_4})\}$ (где $\delta_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, 3, 4$).

С. И. Аксенов показал [2], что при инверсных неисправностях на выходах элементов наличие любой из функций множества $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$ в заданном полном базисе Б гарантирует реализацию произвольной булевой функции схемой, функционирующей с вероятностью ошибки не больше $\epsilon + c\epsilon^2$, где $\epsilon \leq d$, c, d – некоторые положительные константы.

В работе [3] М. А. Алехина ввела новый класс функций M_k , повышающих надежность схем, и доказала для него теорему 1. Множество M_k – множество всех булевых функций $m(x_1, \dots, x_k)$ ($k \geq 3$), обладающих свойством: найдется такой набор (b_1, \dots, b_k) , что на нем и всех соседних с ним наборах функция $m(x_1, \dots, x_k)$ принимает значение 0, а на наборе $(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k)$ и всех соседних с ним наборах – значение 1. Наборы (b_1, \dots, b_k) и $(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k)$ называются характеристическими наборами функции $m(x_1, \dots, x_k)$.

Теорема 1 [3]. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ – произвольная булева функция, а S – схема, ее реализующая с ненадежностью $P(S) \leq p$. Пусть схема S_m реализует функцию $m(x_1, \dots, x_k) \in M_k$ и $P(S_m) \leq p$. Обозначим v^1 и v^0 – вероятности ошибок схемы S_m на характеристических наборах. Тогда функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ можно реализовать такой схемой $\phi(S)$, что $P(\phi(S)) \leq \max\{v^1, v^0\} + + cp^2$, где положительная константа $c \leq kC_k^{[k/2]}$.

Следствие 1. Пусть полный базис Б содержит функцию $m(x_1, \dots, x_k) \in M_k$, а функциональные элементы с вероятностью ϵ подвержены инверсным неисправностям на выходах. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ – произвольная булева функция, а S – схема, реализующая ее с ненадежностью $P(S) \leq s\epsilon$ (s – положительная константа). Тогда функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ можно реализовать такой схемой A над Б, что $P(A) \leq \epsilon + c\epsilon^2$ (положительная константа $c \leq kC_k^{[k/2]}s^2$).

Из рассмотренных выше результатов следует, что существуют такие булевы функции, наличие которых в рассматриваемом базисе при инверсных неисправностях на выходах позволяет реализовать почти все булевы функции асимптотически оптимальными по надежности схемами с ненадежностью ϵ (при $\epsilon \rightarrow 0$).

Пусть функциональные элементы подвержены инверсным неисправностям на входах. Эти неисправности характеризуются тем, что поступающее на каждый вход элемента значение a ($a \in \{0, 1\}$) с вероятностью ϵ ($0 < \epsilon < 1/2$) может превратиться в значение \bar{a} . Очевидно, что при инверсных неисправностях на входах с увеличением t – числа входов каждого элемента базиса Б, его ненадежность увеличивается до $t\epsilon$. Возникает вопрос: можно ли при инверсных неисправностях на входах элементов реализовать произвольную бу-