ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СХЕМЫ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

Методическое пособие для вузов

Составители:
Н.Б. Баева,
Д.В. Ворогушина

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2009

Содержание

ŋqdqɏeɎ bɆ dədɆbɎзə d ɕɔɑbɔɏ ɈqddɎqɏè

Структура системы имеет вид

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

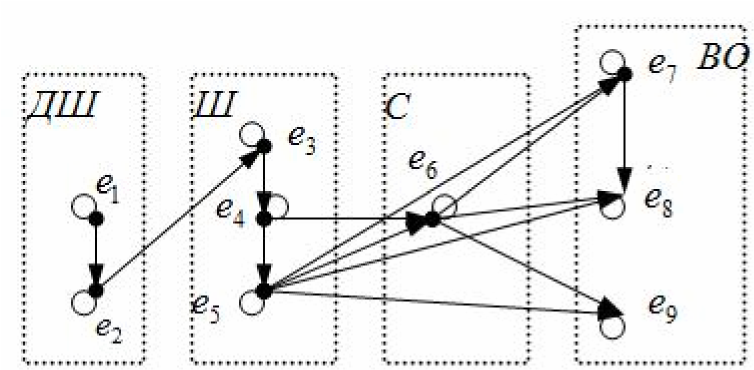
где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если возможен переход из } i-\textit{го элемента в } j-\textit{тый} \\ 0, \textit{иначе} \end{cases}$

Т.о. система образования в России описана. Очевидно, что элементы сами являются крупными системами. Так дошкольное воспитание состоит из яслей, детского сада; школа включает в себя начальную школу, среднюю (до 9 класса), высшую (10-11 класс) и т.д. Т.е. выделенные элементы можно рассматривать как подсистемы. Более детальное описание системы имеет вид.

$S =< E, R, Cm(E,R) >$

$E = \{e_i\}_{i=1}^{10}$, где e_1- ясли, e_2 - детский сад, e_3- начальная школа, e_4- средняя, e_5-высшая школа, e_6-колледж, e_7- бакалавриат, e_8 - магистратура, e_9 - специалисты.

Связи представлены на рисунке.



Матрица, описывающая структуру системы, выписывается по графу, аналогично рассмотренному выше случаю.

Пример 2.

Опишем с помощью простейшего описателя систему, соответствующую модели Леонтьева. Пусть i-порядковый номер «чистой» отрасли, производящей продукт, j - потребляющий продукт ($i, j = \overline{1,n}$). Под «чистой» понимается отрасль, выпускающая(потребляющая) один единственный продукт. Обозначим через

x_i- валовой выпуск i-ой отрасли;

y_j-конечный продукт j-ой отрасли;

a_{ij} -количество (в стоимостном выражении) продукции i-ой отрасли, необходимое для выпуска единицы продукции j-ого вида. Тогда модель Леонтьева может быть записана в следующем виде

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = x_i, i = \overline{1,n} \\ x_j > 0, j = \overline{1,n} \end{cases}.$$

В матричном виде:

$$\begin{cases} (E - A)X = Y \\ X > 0 \end{cases},$$

здесь $A = (a_{ij})$ - матрица коэффициентов прямых затрат, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - вектор валовых выпусков, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ - вектор конечного продукта, E - единичная матрица порядка n.

Элементами в данной задаче будут отрасли $E = \{1,..,n\}$. Связи определяются коэффициентами прямых затрат a_{ij}: $a_{ij} > 0$ - элемент i связан с элементом j, $a_{ij} = 0$ - связи между элементами нет. Структура задается матрицей $\delta = (\delta_{ij})_{n\times n}$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, a_{ij} > 0 \\ 0, a_{ij} = 0 \end{cases}$.

Пример 3.

Составим простейший описатель системы, заданной оптимизационной задачей. Рассмотрим для простоты задачу линейного программирования,

$$f(x) = x_1 + 2x_2 \to \max$$

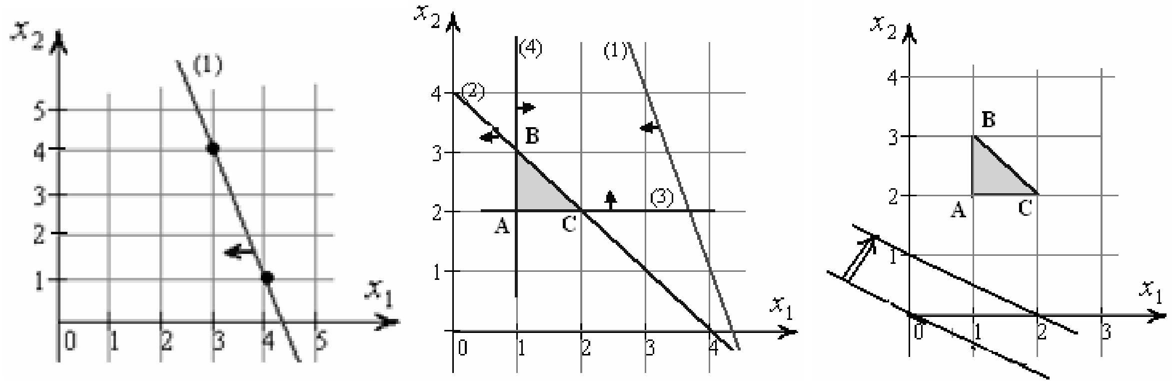
$$\Omega \begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 13 & (1) \\ x_1 + x_2 \le 4 & (2) \\ x_1 \ge 1 & (3) \\ x_2 \ge 2 & (4) \end{cases}$$

Решим задачу графически.

Построим допустимое множество задачи Ω (точки данного множества удовлетворяют всем ограничениям). Найдем полуплоскость, заданную первым неравенством. Для этого построим прямую $3x_1 + x_2 = 13$. Данная прямая проходит через точки A_1, A_2

$3x_1 + x_2 = 13$	x_1	x_2
A_1	3	4
A_2	4	1

Точка (0,0) удовлетворяет неравенству (1) ($0 \le 13$), принадлежит искомой плоскости, значит, полуплоскость под прямой задается неравенством (1)



Аналогично строим области заданные неравенствами (2)-(4). Т.о. построено множество Ω. Допустимое множество - ΔABC, с вершинами $A=(1,2)$, $B=(1,3)$, $C=(2,2)$.Найдем максимальное значение функции цели f на данном множестве. Для этого построим любые две линии уровня функции f (линии уровня задаются уравнениями $f(x)=const=C$), например, $x_1+2x_2=0$ и $x_1+2x_2=2$ (т.е. $C=0, C=2$). Таблицы точек для построения прямых

$x_1+2x_2=0$	x_1	x_2
A_1	0	0
A_2	-2	1

$x_1+2x_2=2$	x_1	x_2
A_1	0	1
A_2	2	0

Из рисунка видно, что при увеличении константы С, прямая $f(x)=C$ двигается вверх. Параллельным переносом будем сдвигать прямую $f(x)=C$ до последней точке пересечения с множеством Ω. Решением задачи является точка $x^* = B = (1,3)$, максимальное значение функции цели на допустимом множестве $f^* = f(x^*) = 9$.

В данной задаче элементами являются вершины допустимого множества $E = \{A(1,2), B(1,3), C(2,2)\}$, связи задаются <u>всеми неравенствами</u>

$$R = \{3x_1 + x_2 \le 13, x_1 + x_2 \le 4, x_1 \ge 1, x_1 \ge 1, x_2 \ge 2\} = \{(1)-(4)\}$$

А структура системы – <u>граница допустимого множества</u>, т.е. неравенства, участвующие в образовании граничных точек ((2)-(4)), записываемые как <u>равенства</u>. $Cm = \{x_1 + x_2 = 4, x_1 = 2, x_2 = 1\}$.

Т.о. построен простейший описатель системы (1)-(4).

Пример 4. Рассмотрим случай, когда описывается как система многомерная задача линейной оптимизации. Аналогично с предыдущем примером элементами будут вершины допустимого множества, связями – все