

SUR UNE PROPRIÉTÉ DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
QUI DÉFINIT LA ROTATION
D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE.

PAR

SOPHIE KOWALEVSKI

À STOCKHOLM.

Dans mon mémoire *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe*¹ j'ai dit que les équations différentielles²

$$(1) \quad \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + y_0 r'' - z_0 r', & \frac{dr}{dt} &= r\gamma' - q\gamma'', \\ B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + z_0 r - x_0 r'', & \frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma, \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + x_0 r' - y_0 r, & \frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma', \end{aligned}$$

auxquelles se ramène le problème considéré, n'admettent point en général de système d'intégrales uniformes, renfermant cinq constantes arbitraires et jouissant de la propriété de n'avoir que des pôles dans toute l'étendue du plan de la variable t .

¹ Acta mathematica, T. 12.

² Pour cause de brièveté j'écrirai toujours dans le présent mémoire x_0, y_0, z_0 au lieu de Mgx_0, Mgy_0, Mgz_0 . x_0, y_0, z_0 désignent donc les coordonnées du centre de gravité du corps solide, multipliées par la masse de ce corps et par l'intensité de la force de gravité.

Si tel était le cas il faudrait en effet pouvoir intégrer les équations différentielles (1) par des séries de la forme

$$(2) \quad \begin{aligned} p &= t^{-1} \sum_0^{\infty} p_n t^n, & r &= t^{-2} \sum_0^{\infty} r_n t^n, \\ q &= t^{-1} \sum_0^{\infty} q_n t^n, & r' &= t^{-2} \sum_0^{\infty} r'_n t^n, \\ r &= t^{-1} \sum_0^{\infty} r_n t^n, & r'' &= t^{-2} \sum_0^{\infty} r''_n t^n, \end{aligned}$$

ces séries devant être uniformément convergentes dans un certain domaine et devant *contenir en outre cinq constantes arbitraires*. Mais, comme je l'ai fait voir dans mon mémoire cité, pour $n = 1, 2, \dots$ les coefficients $p_n, q_n, r_n, f_n, g_n, h_n$ dans les séries (2) sont définis par le système d'équations linéaires suivantes

$$(3) \quad \begin{aligned} (n-1)Ap_n - A_1(q_0r_n + r_0q_n) + z_0g_n - y_0h_n &= P_n, \\ (n-1)Bq_n - B_1(r_0p_n + p_0r_n) + x_0h_n - z_0f_n &= Q_n, \\ (n-1)Cr_n - C_1(p_0q_n + q_0p_n) + y_0f_n - x_0g_n &= R_n, \\ (n-2)f_n - r_0g_n - g_0r_n + q_0h_n + h_0q_n &= F_n, \\ (n-2)g_n - p_0h_n - h_0p_n + r_0f_n + f_0r_n &= G_n, \\ (n-2)h_n - q_0f_n - f_0q_n + p_0g_n + g_0p_n &= H_n, \end{aligned}$$

où les $P_n \dots H_n$ désignent des fonctions entières des coefficients $p_m \dots h_m$ tels que $m < n$.

Pour $n = 0$ on a le système d'équations suivantes

$$(4) \quad \begin{aligned} -Ap_0 &= A_1q_0r_0 + y_0h_0 - z_0g_0, & -2f_0 &= r_0g_0 - q_0h_0, \\ -Bg_0 &= B_1r_0p_0 + z_0f_0 - x_0h_0, & -2g_0 &= p_0h_0 - r_0f_0, \\ -Cr_0 &= C_1p_0q_0 + x_0g_0 - y_0f_0, & -2h_0 &= q_0f_0 - p_0g_0. \end{aligned}$$

J'ai montré dans mon mémoire cité que, sauf pour trois cas spéciaux, il n'y a qu'un nombre fini de systèmes de valeurs de $p_0, q_0, r_0, f_0, g_0, h_0$ qui satisfont aux équations (4).

Pour chacun de ces systèmes les valeurs de tous les coefficients $p_n \dots h_n$ sont complètement déterminées par les équations linéaires (3), à moins que le déterminant de ces équations ne soit nul pour certaines valeurs entières positives de n . C'est donc ce déterminant que je vais maintenant calculer.

Je dois de nouveau, comme je l'ai fait dans mon mémoire cité, distinguer deux cas.

Premier cas. Les quantités réelles positives A, B, C sont telles qu'aucune des différences

$$A_1 = B - C, \quad B_1 = C - A, \quad C_1 = A - B$$

n'est nulle. Dans ce cas j'ai montré dans mon mémoire que les équations (4) ne peuvent être satisfaites que par le système suivant de valeurs de $p_0, q_0, r_0, f_0, g_0, h_0$.

Si l'on pose

$$a = \sqrt{\frac{2A + \lambda}{A_1}}, \quad b = \sqrt{\frac{2B + \lambda}{B_1}}, \quad c = \sqrt{\frac{2C + \lambda}{C_1}}$$

(en définissant le signe de chacune de ces racines d'une manière arbitraire) on doit avoir

$$p_0 = bc,$$

$$q_0 = ca,$$

$$r_0 = -ab.$$

En posant ensuite

$$\mu = Ax_0p_0 + By_0q_0 + Cz_0r_0,$$

on trouve

$$f_0 = -A_1q_0r_0\frac{\lambda}{\mu} = (2A + \lambda)p_0\frac{\lambda}{\mu},$$

$$g_0 = -B_1r_0p_0\frac{\lambda}{\mu} = (2B + \lambda)q_0\frac{\lambda}{\mu},$$

$$h_0 = -C_1p_0q_0\frac{\lambda}{\mu} = (2C + \lambda)r_0\frac{\lambda}{\mu},$$

la quantité λ désignant une racine quelconque de l'équation algébrique

$$Ax_0p_0 + By_0q_0 + Cz_0r_0 = -(A_1x_0q_0r_0 + B_1y_0r_0p_0 + C_1z_0p_0q_0).$$