

УДК 517.11(075)
ББК 22.12я73
Н53

Первое издание книги было частично поддержано Минвузом России, гранты 94-1.17-336, программа «Фундаментальные исследования в естествознании» и «Логические операторы», Новосибирский центр по математическим наукам, 1996. Второе издание книги было поддержано фирмой «Новософт», г. Новосибирск

Непейвода, Н. Н.

Н53 Прикладная логика : учебное пособие / Н. Н. Непейвода. — 3-е изд., существ. перераб. и доп. — Москва, Берлин : Директ-Медиа, 2019. — 575 с. : ил. DOI: 10.23681/561272

ISBN 978-5-4499-0126-2

Данное пособие содержит введение в язык современной математики и методы современной логики, основные важнейшие для приложений и методологии результаты логики XX века, советы по применению методов и методологии логики в информатике и информационном анализе сложных задач, методологический и философский анализ следствий приведённых результатов и методов. Впервые в мировой литературе оно содержит систематическое изложение конструктивной математики с точки зрения как современной информатики, так и многоуровневого анализа её успехов и уроков. Его можно использовать совместно с обучающими программами высокого уровня и программами проверки рассуждений, подобными AGDA.

Рекомендовано Государственным комитетом Российской Федерации по высшему образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям «Математика», «Прикладная математика», «Лингвистика», «Философия» и «Психология».

Предыдущие версии книги выпущены издательствами УдГУ, 1997 (1-е издание); НГУПресс, 2000 г. (2-е издание, исправленное и дополненное).

Текст приводится в авторской редакции.

УДК 517.11(075)
ББК 22.12я73

ISBN 978-5-4499-0126-2

© Непейвода Н. Н., текст, 2019
© Издательство «Директ-Медиа», оформление, 2019

Оглавление

Введение	x
In.1. Что такое современная логика?	x
In.2. Методологические принципы, на которых основано данное изложение	xix
In.3. Как работать с данной книгой?	xxiv
In.4. Введение ко второму изданию	xxvii
In.5. Введение к третьему изданию	xxviii
 I Язык математики	 1
1. Необходимость точного языка в математике	2
1.1. Как и почему появился язык математической логики?	2
1.2. Зачем изучать формальный язык математики?	7
2. Простейшие высказывания	13
2.1. Что такое высказывание?	13
2.2. Математическая интерпретация высказываний	18
2.3. Предметы и универс. Термы	19
2.4. Предикаты и элементарные формулы	21
2.5. Некоторые обозначения	23
3. Запись высказываний. Логические формулы	26
3.1. Связка ‘и’	27
3.2. Связка ‘или’	27
3.3. Связка ‘следует’	28
3.4. Связка ‘тогда и только тогда’	29
3.5. Связка ‘не’	29
3.6. Таблицы истинности	30
3.7. Квантор ‘Для всех’	30
3.8. Квантор ‘Существует’	31
3.9. Ограниченные кванторы	31

4. Методы перевода с естественного языка на математический и обратно	38
4.1. Кванторы. Области действия.	38
4.2. “Многоэтажные” кванторы. Дополнительные ограничения	40
4.3. «Если на клетке слона увидишь надпись “буйвол”, не верь глазам своим»	47
4.4. Таблицы истинности и формулировка отрицаний	51
4.5. Простейшие преобразования классических формул	53
4.6. Парадокс кучи куч	55
4.7. Равенство, Единственность и неединственность	56
5. Базовые математические понятия	62
5.1. Множества. Диаграммы Эйлера и Венна	62
5.2. Кортежи, n -ки, наборы, прямые произведения, прямые суммы	71
5.3. Отношения	76
5.4. Функции	84
5.5. Теория множеств	88
5.6. Фактор-множества	98
5.7. Графы	102
5.8. Диаграммы	106
5.9. Слова	113
II Классическая логика	115
6. Индукция	116
6.1. О разных видах индукции	116
6.2. Об индуктивных определениях	121
6.3. Трансфинитная индукция и ординалы	125
6.3.1. Построение начального отрезка ординалов	125
6.3.2. Свойства вполне упорядоченных множеств	127
6.3.3. Представления ординалов. Действия над ординалами	130
6.3.4. Построение функций рекурсией по определению либо параметру	135
7. Введение в синтаксис	138
7.1. Синтаксис логического языка	138
7.2. Корректность синтаксических определений	145
7.3. Свободные и связанные переменные. Подстановка	150
8. Семантика классической логики	155
8.1. Интерпретация языка конечных типов	156
8.2. Теория, модель, логическое следствие	159
8.3. Теорема о замене эквивалентных	163
8.4. Булевы алгебры и алгебраическая семантика	164
8.5. Языки высших порядков	167

9. Семантические таблицы для классической логики	170
9.1. От таблиц истинности к семантическим таблицам	170
9.2. Правила разбиения формул в семантических таблицах	172
9.3. Семантические таблицы с кванторами	175
9.4. Сокращённые семантические таблицы	180
9.5. Исчисления традиционного типа	186
9.6. Секвенции и формализация семантических таблиц	191
9.7. Семантические таблицы с равенством и для теорий	195
9.8. Теорема полноты	198
9.9. Сечения	203
10. Элементы нестандартного анализа	213
10.1. Историческое введение	213
10.2. Нестандартная модель	217
10.3. Нестандартная действительная ось	219
10.4. Нестандартные переформулировки	223
10.5. Суперструктуры и теорема Лося	227
10.5.1. Аксиома выбора, некоторые её следствия и альтернативы	227
10.5.2. Ультрафильтры и структуры	231
11. Естественный вывод в классической логике	234
11.1. О структуре математических доказательств	234
11.2. Правила естественного вывода	236
11.2.1. Общая структура. Импликация и конъюнкция	236
11.2.2. Дизъюнкция и разбор случаев	238
11.2.3. Отрицание. Приведение к абсурду и “от противного”, $A \vee \neg A$	239
11.2.4. Некоторые полезные выводимые правила	240
11.2.5. Кванторы	241
11.3. Естественный вывод как граф	244
11.4. Правила формулировки отрицаний согласованность с классической истинностью	246
11.5. Теорема полноты естественного вывода	250
11.6. Логика с равенством и её полнота	254
11.7. Метод резолюций и его сравнение с методом естественного вывода	255
11.8. Окольные пути как средство сокращения вывода	261
11.9. Несколько слов о языке Пролог	263
12. Основы теории определений	266
12.1. Определения в математике	266
12.2. Сокращающие определения	267
12.3. Теорема Крейга об интерполяции	268
12.4. Теорема Бета об определмости	271

13. Неполнота и неформализуемость	273
13.1. Теорема Тарского о невыразимости истины	273
13.2. Аксиоматическое описание вычислимости	275
13.3. Представимость через доказуемость	285
13.4. Неполнота	291
13.5. Вокруг теоремы Гёделя	292
13.6. Формализация неформализуемых понятий	297
13.7. Монстры	302
 III Введение в неклассические логики	 305
14. Основы λ-исчисления	306
14.1. Основы λ -языка	306
14.2. λ -конверсии	308
14.3. Теорема о сходимости (Чёрча-Россера)	313
14.4. λ -исчисление	315
14.5. Комбинаторная логика	316
14.6. Эквивалентность S , K и λ -исчисления	319
14.7. Типизация	320
14.8. Эквивалентность вычислимости и λ	323
15. Корни неклассических логик	324
15.1. Корни неклассических логик в традиционной логике	324
15.1.1. Закон тождества	324
15.1.2. Закон непротиворечия	326
15.1.3. Закон исключённого третьего	327
15.1.4. Закон достаточного основания	328
15.1.5. Алгебраические законы логики	329
15.2. Сила и недостатки классической логики	331
15.3. Использование доказательств	332
15.3.1. Сведение новой задачи к уже решенным	333
15.3.2. Выявление условий, при которых можно пользоваться данным утверждением	334
15.3.3. Получение построения, дающего некоторый результат	335
15.3.4. Произнесение заклинания, дабы освятить своё либо предложенное заказчиком решение	336
15.4. О чём не принято говорить сейчас	337
16. Интуиционистская логика	339
16.1. Создание интуиционистской логики	339
16.1.1. Брауэр: идея конструктивности	339
16.1.2. Формализация и первые интерпретации	342
16.1.3. Разногласия и новые идеи	342
16.1.4. Период после Брауэра	343

16.1.5. Вторая героическая эпоха: математические результаты и попытки приложений	345
16.2. Интерпретация реализуемости	345
16.3. Формализация Гливенко-Гейтинга	351
16.4. Первые модели интуиционистской логики	353
16.5. Модели Крипке	355
16.6. Семантические таблицы для интуиционистской логики	359
16.7. Полнота семантических таблиц	364
16.8. Фундаментальные результаты теории доказательств	365
16.9. Реализуемости и вариации интуиционистских принципов	369
16.10. Интуиционистская логика и категории	371
17. Семантики Крипке и базирующиеся на них логики	374
17.1. Общая идея	374
17.2. Модальные логики и их модели Крипке	376
17.2.1. Язык и общая конструкция модели	376
17.2.2. Свойства отношения достижимости и конкретные логики	377
17.2.3. Нешкальные логики	378
17.3. Временные, динамические и программные логики	379
18. Проблема отрицания	381
18.1. Три стороны классического отрицания и четвёртая — содержательного	381
18.2. Минимальная логика	383
18.3. Логика с сильным отрицанием	384
18.4. Логика неполной информации	386
18.5. Основы логики противодействия	387
18.6. Паранепротиворечивая логика	388
IV Конструктивные и методологические аспекты логики	389
19. Конструктивизм	391
19.1. Введение	391
19.2. Соглашения об обозначениях	392
19.3. Предпосылки конструктивизма	393
19.4. Появление конструктивизма	397
19.4.1. Интуиционизм и программа Гильберта	400
19.5. Базовые принципы и методы конструктивизма	403
19.5.1. Принцип конечной информации и чум-пространства	403
19.5.2. Метод провокации и некорректные задачи	410
19.6. Интуиционистская логика как конструктивная	418

20. Алгоритмы и реализуемость	428
20.1. Алгоритмическая реализуемость	428
20.2. Советский конструктивизм	430
20.3. Недостатки советского конструктивизма	437
21. Интуиционизм как альтернатива алгоритмическому конструктивизму	445
21.1. О формализации незнания	445
21.2. Промежуточные варианты конструктивизма	448
21.3. Модели конструктивных теорий	450
21.4. Различие вместо равенства	451
21.5. Анализ логических принципов	451
21.6. Неудачная попытка приложения	456
22. Доказательства и программы	459
22.1. Изоморфизм Карри-Ховарда	459
22.2. Системы высших типов	461
22.3. Призраки и классификация выводов	462
22.4. Теорема о верификации	463
22.5. Проблема совместимости операторов на примере exit	464
23. Методологические следствия теорем о неполноте	467
23.1. Обобщённые вычислительные системы	467
23.2. Обобщение колмогоровской сложности	470
23.3. Обобщение теоремы Чейтина	471
23.4. Обобщённая теорема Гёделя о неполноте	472
23.5. Алгоритмическая случайность и антиномии Канта	473
23.6. Закон комитета	476
23.7. Трёхглавый дракон	477
23.8. Предел Чейтина и парадокс изобретателя	479
23.9. Следствия для организации творческой работы	481
23.10 Предел Чейтина и языки программирования	483
24. Прикладная логика	485
24.1. Место и задачи прикладной логики	485
25. Формализация и деформализация	489
25.1. Наши цели	489
25.2. Процесс решения задачи	490
25.3. Логический процесс	490
25.4. Формализация	490
25.4.1. Элементарная техника	491
25.4.2. Выбор логики	493
25.4.3. Замена понятий	500
25.4.4. Устранение мешающих факторов	500
25.4.5. Эффективность	501

25.5. Проверка рассуждений	501
25.6. Деформализация	504
25.6.1. Нетривиальность процесса деформализации	504
25.6.2. Аспекты деформализации	504
25.6.3. Подведение итогов	506
25.7. Эстетика, эффективность и адекватность	506
25.8. Следствия и благодарности	508
Общие принципы и выводы. Важнейшие определения	510

Список иллюстраций

1	Аристотель	xii
2	Аверроэс (рисунок из Википедии)	xiii
3	Гермес Трисмегист	xv
4	Ч. С. Пирс	xv
5	Л. Лёвенгейм	xvii
1.1	Схема деятельности информатика и аналитика	8
2.1	Четыре точки	22
5.1	Диаграмма Эйлера	66
5.2	Правильная диаграмма Венна	66
5.3	Правильная диаграмма Венна для неправильного тождества	66
5.4	Неправильная диаграмма Венна	67
5.5	$x - y$ — целое число	76
5.6	Диаграммы Гессе двух важных пятиэлементных множеств	81
5.7	Инъекция и накрытие, сюръекция и ретракция	87
5.8	Графы	103
5.9	Диаграммы для прямого произведения	106
5.10	Диаграммы для прямой суммы	107
6.1	Предложение о внутренних углах многоугольника	119
6.2	Формула и соответствующее ей дерево	123
6.3	Структура веера	124
9.1	Э. В. Бет	171
16.1	Л. Э. Я. Брауэр	339
16.2	А. Гейтинг	351
16.3	Топологическая интерпретация $A \vee \neg A$	355
16.4	Опровергающие модели Крипке	357
16.5	Сильно опровергающая модель Крипке	357
18.1	Ян Амос Коменский	390
25.1	Процесс решения	490