

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
ПОВОЛЖСКИЙ РЕГИОН

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

№ 4

2008

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<i>Васин А. В.</i> Об асимптотически оптимальных схемах в базисе $\{x \& y, x \vee y, \bar{x}\}$ при инверсных неисправностях на выходах элементов	2
<i>Алехина М. А., Волчихин В. И.</i> О двух методах повышения надежности схем	17
<i>Куприянова С. Н., Смирнов Ю. Г.</i> Метод интегральных уравнений для неоднородного волнового уравнения с нелинейным заполнением по закону Керра	26
<i>Бойков И. В., Захарова Ю. Ф., Дмитриева А. А.</i> Устойчивость простейшей математической модели иммунологии	32
<i>Бойков И. В., Захарова Ю. Ф., Дмитриева А. А.</i> Устойчивость моделей противовирусного и противобактериального иммунного ответа	47
<i>Богданов А. Ю.</i> Синтез эффективных алгоритмов оптимизации и развитие прямого метода Ляпунова	62

ФИЗИКА

<i>Полосин В. Г., Тертычная С. В.</i> Изучение составляющих источника радона на основе анализа статистических результатов измерения его объемной активности	71
<i>Полосин В. Г., Тертычная С. В.</i> Методика разделения статистических данных для смеси двух распределений на примере результатов измерения объемной активности радона	79
<i>Сазонов А. Р., Буев А. Р., Леухин А. В.</i> Взаимодействие магнитного поля со стопой сверхпроводящих колец	87
<i>Буев А. Р., Леухин А. В., Сазонов А. Р.</i> Влияние дисперсности прекурсоров на эффект аномального поведения серебра в поликристаллическом оксиде магния	93
<i>Червон С. В., Фомин И. В.</i> Квантовое рождение начальных космологических возмущений	97
Аннотации	108
Сведения об авторах	112

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ СХЕМАХ В БАЗИСЕ $\{x \& y, x \vee y, \bar{x}\}$ ПРИ ИНВЕРСНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ НА ВЫХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассматривается задача синтеза асимптотически оптимальных схем, реализующих булевы функции, при инверсных неисправностях на выходах элементов в базисе $\{x \& y, x \vee y, \bar{x}\}$. Доказано, что почти все булевы функции можно реализовать асимптотически оптимальными по надежности схемами, которые функционируют с ненадежностью, асимптотически равной 3ε при $\varepsilon \rightarrow 0$, где ε – вероятность инверсной неисправности на выходе базисного элемента. Сложность предлагаемых схем превышает сложность минимальных схем, построенных только из надежных элементов, не более чем в 3 раза.

Введение

Впервые задачу синтеза надежных схем из ненадежных функциональных элементов (ФЭ) рассматривал Дж. фон Нейман [1]. Он предполагал, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью ε ($\varepsilon \in (0; 1/2)$) подвержены инверсным неисправностям на выходах. Эти неисправности характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему булеву функцию f , а в неисправном – функцию \bar{f} . С помощью итерационного метода Дж. фон Нейман установил, что в произвольном полном базисе при $\varepsilon \in (0; 1/6)$ любую булеву функцию можно реализовать схемой, на выходе которой вероятность ошибки при любом входном наборе значений переменных не превосходит $c_1\varepsilon$ (c_1 – некоторая константа, зависящая от базиса).

Затем схемы с инверсными неисправностями на выходах элементов исследовались в работах Р. Л. Добрушина, С. И. Ортюкова, Д. Улига [2–7] и некоторых других авторов, причем главное внимание уделялось сложности схем (задача синтеза оптимальных по надежности схем до появления работ М. А. Алехиной не ставилась). Сформулируем результаты работ названных авторов. Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в произвольном конечном полном базисе $B = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, $m \in N$ [8] (множество всех функциональных элементов E_i , функции которых e_i принадлежат базису B , будем также называть базисом B [9]). Каждому элементу базиса E_i приписано положительное число $v(E_i)$ – вес данного элемента. Сложность $L(S)$ схемы S определяется как сумма весов всех входящих в нее элементов. Предполагается, что все элементы схемы независимым образом с вероятностью ε переходят в неисправные состояния. Ненадежность $P(S)$ схемы S определяется как максимальная вероятность ошибки на выходе схемы при всевозможных входных наборах. Надежность схемы S равна $1 - P(S)$.

Вводится функция Шеннона $L_{p,\varepsilon}(n) = \max_f \min_S L(S)$, характеризующая сложность схем, реализующих функции от n переменных в базисе B , где минимум берется по всем схемам S из ненадежных элементов, реализующим функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с ненадежностью $P(S) \leq p$, а максимум – по всем булевым функциям f от n переменных.

Пусть $\rho = \min_{E_i} (v(E_i)/(n(E_i) - 1))$, где минимум берется по всем элементам E_i базиса, для которых $n(E_i) > 1$, $n(E_i)$ – число существенных переменных функции e_i , реализуемой элементом E_i , а $v(E_i)$ – вес функционального элемента E_i , $i = 1, \dots, m$.

О. Б. Лупанов [10] показал, что для схем, реализующих булевы функции от n переменных и состоящих только из надежных элементов (т.е. при $\varepsilon = 0$ и $p = 0$), выполняется соотношение $L_{0,0}(n) \sim \rho \cdot 2^n / n$.

С. И. Ортюков [6] для инверсных неисправностей на выходах элементов получил следующий результат: пусть $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $p > q(\varepsilon)L_g$, где L_g – минимальное число надежных элементов, необходимое для реализации функции голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ в рассматриваемом базисе, $q(\varepsilon)$ – некоторая функция такая, что $q(\varepsilon) = \varepsilon + 3\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда существует такая функция $\rho(\varepsilon) \rightarrow \rho$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, что $L_{p,\varepsilon}(n) \sim \rho(\varepsilon)2^n/n$.

Д. Улиг [7] для инверсных неисправностей на выходах элементов с вероятностью ошибки ε доказал, что для любых сколь угодно малых чисел c и b ($c, b > 0$) существует число ε' ($\varepsilon' \in (0, 1/2)$) такое, что при любом ε ($\varepsilon \in (0, \varepsilon')$) и любом p , удовлетворяющем условию $p \geq (1+b)\varepsilon L_g$ (точнее, $p \geq q(\varepsilon)L_g$), справедливо соотношение $L_{p,\varepsilon}(n) \leq (1+c)\rho 2^n/n$.

Таким образом, в результатах С. И. Ортюкова и Д. Улига асимптотика функции Шеннона сохраняется с точностью до множителя, сколь угодно близкого к единице (при этом вероятность сбоя ε ограничена константой), т.е. найденные ими методы синтеза позволяют строить асимптотически оптимальные по сложности схемы, функционирующие с некоторым уровнем надежности.

Из результатов Н. Пиппенджера [11] следует, что при инверсных неисправностях на выходах с вероятностью ошибки $\varepsilon \in (0, 1/200]$ любую булеву функцию от n переменных в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ можно реализовать такой схемой S , что $P(S) \leq 18\varepsilon$, $L(S) \leq 170 \cdot 2^n/n$.

С. В. Яблонский [12] рассматривал задачу синтеза надежных схем в базисе $B = \{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \neg x_1, g(x_1, x_2, x_3)\}$. Он предполагал, что элемент, реализующий функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$, абсолютно надежный, а конъюнктор, дизъюнктор и инвертор – ненадежные, подвержены произвольным неисправностям, ненадежность каждого из элементов не больше ε . Им доказано, что для любого $p > 0$ существует алгоритм, который для каждой булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ строит такую схему S , что $P(S) < p$, $L(S) \leq 2^{n-1}/n$.