

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»

И.Н. Прядко, Б.Н. Садовский

## **КИНЕМАТИКА**

Конспекты лекций

Издательско-полиграфический центр  
Воронежского государственного университета  
2009

## Оглавление

<b>1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ</b>	5
1.1. Отмеченная точка.	5
1.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ	5
1.3. ДЕКАРТОВЫ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА	7
1.4. НЕИЗМЕНЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ, ТВЕРДЫЕ СРЕДЫ И ТЕЛА	8
1.5. СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА И СИСТЕМЫ КООРДИНАТ	9
1.6. ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ, СКОРОСТЬ, УСКОРЕНИЕ, ТРАЕКТОРИЯ	10
1.7. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ	10
1.8. ТРИ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯ	12
1.9. СФЕРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ	12
1.10. ГЕОГРАФИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ	13
1.11. ЕСТЕСТВЕННЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ	13
1.12. ПРИМЕР АНАЛИЗА ДВИЖЕНИЯ ПРИ ЕСТЕСТВЕННОМ ЗАДАНИИ	15
<b>2. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ</b>	16
2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	16
2.2. ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ	18
2.3. ПРИМЕР: ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ОБОДА КОЛЕСА	19
2.4. ПРИМЕР: ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ, СКОЛЬЗЯЩЕЙ ПО КОЛЕСУ	21
2.5. НЕПОСРЕДСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ СЛОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ	22
<b>3. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА</b>	22
3.1. СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧЕК ТВЕРДОЙ СРЕДЫ	22
3.2. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ	24
3.3. ВРАЩЕНИЕ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ПРЯМОЙ	25
3.4. ЛЕММА О КОСОСИММЕТРИЧНОСТИ	26
3.5. ЛЕММА О КОСОСИММЕТРИЧЕСКОЙ МАТРИЦЕ	26
3.6. ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА О СКОРОСТЯХ ТОЧЕК ТВЕРДОЙ СРЕДЫ	27
3.7. СЛЕДСТВИЕ О ПЕРЕНОСНОЙ ВРАЩАТЕЛЬНОЙ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИИ КОРИОЛИСА	28
3.8. СВОЙСТВА ВЕКТОРА МГНОВЕННОЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ	29
3.9. ПРИМЕР: ПРАВЫЙ БЕРЕГ КРУЧЕ ЛЕВОГО	30
3.10. ОБ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА	32
3.11. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ	32
3.12. МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР СКОРОСТЕЙ	34
3.13. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ НАХОЖДЕНИЯ МГНОВЕННОГО ЦЕНТРА СКОРОСТЕЙ	35
<b>4. КИНЕМАТИКА СВЕТЛЯЧКОВ</b>	36
4.1. ЭФИР И СВЕТОВЫЕ СИГНАЛЫ	36
4.2. СВЕТЛЯЧОК И ЕГО ТАКТ	37

Для любых отмеченных точек  $A$  и  $B$  определены и обладают известными свойствами следующие понятия:

- *направленный отрезок*  $A(t)B(t)$ ,
- *вектор*  $\vec{r} = \vec{r}_{AB}(t)$ , определяемый этим направленным отрезком (который можно формально представлять как множество всех направленных отрезков, получаемых из данного параллельными переносами),

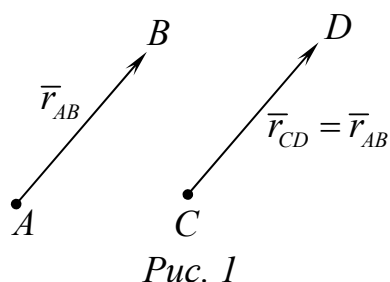


Рис. 1

- произведение  $\alpha \vec{r}_{AB}(t)$  вещественного числа на вектор и сумма векторов  $\vec{r}_{AB}(t) + \vec{r}_{CD}(t)$ ,
- угол  $\angle(\vec{a}, \vec{b})$  – радианная мера угла кратчайшего поворота вектора  $\vec{a}$  до совпадения с направлением вектора  $\vec{b}$ ,

- скалярное произведение  $(\vec{a}, \vec{b})$  векторов, равное произведению их длин на косинус угла между ними,
- расстояние  $\rho(A(t), B(t)) = |A(t)B(t)| = |\vec{r}| = \sqrt{(\vec{r}, \vec{r})} = \sqrt{r^2}$  между точками (длина вектора) в данный момент,
- *множество*  $V^t$  всех векторов  $\vec{r}_{AB}(t)$ , которое вместе с операциями умножения на вещественные скаляры, сложения и скалярного умножения векторов представляет собой трехмерное линейное евклидово пространство.

Пространства  $E^t$  при разных значениях  $t$  изоморфны между собой, однако никакого «естественного» изоморфизма между ними не существует. Невозможно сегодня указать точку мирового пространства, в которой вчера в полдень находилась вершина Эйфелевой башни. Но если задать какую-нибудь систему отсчета и связанную с ней систему координат, например, связанные с Землей широту, долготу и высоту над уровнем моря, то соответствие между точками пространств  $E^{t_1}$  и  $E^{t_2}$  можно определить через равенство координат.

### 1.3. Декартовы системы отсчета

Декартовой системой отсчета будем называть упорядоченную четверку отмеченных точек  $S = (O, E_1, E_2, E_3)$ , для которой в любой момент времени выполнены три условия:

- 1)  $|OE_1| = |OE_2| = |OE_3| = 1$ ,
- 2)  $OE_i \perp OE_j$  ( $i \neq j$ ),
- 3) направленные отрезки  $OE_1, OE_2, OE_3$  образуют *правую тройку*, т. е. с конца последнего из них кратчайший поворот первого до второго кажется происходящим против часовой стрелки (Рис. 2).

Для векторов, определяемых отрезками  $OE_1, OE_2, OE_3$ , мы будем

использовать обозначения  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$

(иногда  $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$  или  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ). Декарто-

ва система отсчета  $S$  может быть эк-

вивалентно определена заданием на-

чала отсчета  $O$  и правильно ориен-

тированного ортонормированного ба-

зиса  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$  в пространстве  $V^t$  при любом  $t$ .

Положение отмеченной точки  $A$  по отношению к декартовой системе отсчета  $S$  в любой момент времени определяется ее радиус-вектором, который можно разложить по базису  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ :

$$\bar{r}_{OA} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3.$$

При фиксированном начале отсчета  $O$  радиус-вектор точки  $A$  будем обозначать также  $\bar{r}_A$ , а для фиксированной точки  $A$  —  $\bar{r}$ .

Арифметический трехмерный вектор

$$r_{OA} = r_A = r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

изображает положение точки  $A$  в момент  $t$  в координатном пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Соответствие между геометрическими и арифметическими векторами  $\bar{r}$  и  $r$ , задаваемое с помощью базиса  $\bar{e} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ , является, как известно, изоморфизмом линейных евклидовых пространств, т. е. взаимно однозначным отображением, сохраняющим линейные операции и скалярное произведение.

Геометрическим векторам  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  соответствуют арифметические векторы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

#### 1.4. Неизменяемые системы, твердые среды и тела

В механике широко используются близкие по смыслу понятия «неизменяемая система», «твердое тело», «твердая среда». Мы будем использовать их в следующих значениях.

*Неизменяемой системой* будем называть любую совокупность отмеченных точек, расстояния между которыми остаются неизменными во времени. Например, декартова система отсчета является неизменяемой, так как расстояния между точками  $O$  и  $E_i$ , по определению, постоянно равны 1, а отсюда следует, очевидно, что расстояния между различными  $E_i$  также постоянны и равны  $\sqrt{2}$ .

Если неизменяемая система в любой момент  $t$  заполняет все пространство  $E'$ , то она называется *твердой средой*. Например, множество  $\Sigma$  всех отмеченных точек, неподвижных (т. е. имеющих постоянные координаты) относительно заданной декартовой системы отсчета  $S$ , есть твердая среда.

Термин *твердое тело* используется в литературе не вполне однозначно, но всегда означает неизменяемую систему, обладающую (возмож-