Министерство образования Российской федерации
Воронежский государственный университет

конспекты лекций вопросы и задачи

Дифференциальные уравнения

часть 1

Элементарная теория

пособие для студентов специальности 02.03.01

Воронеж
2015

Оглавление

ŋqdqyэʏ bɐ dəqƐbʏзə d ɛɒɑbɔɐ ɟqdqʏqɐè

1. Элементарная теория

1.1. Основные понятия и уравнения с разделяющимися переменными

1.1.1. Примеры.

Рассмотрим ряд примеров уравнений, содержащих независимую переменную, неизвестную функцию этой переменной вместе с производной или дифференциалами.

а) $y' = x^2$. Решением этого уравнения является любая функция вида $y = \frac{x^3}{3} + c$, где c - произвольная константа.

Это уравнение можно также записать «в дифференциалах»:

$$dy = x^2 dx.$$

б) Замечательным свойством функции $y = e^x$ является то, что она совпадает со своей производной; это свойство записывается в виде «обыкновенного дифференциального уравнения» (ОДУ)

$$y' = y,$$

решениями которого, наряду с e^x, будут все функции семейства $y = ce^x$.

в) С учетом механического смысла второй производной (ускорение) уравнение прямолинейного равноускоренного движения записывается в форме

$$\ddot{x} = a,$$

где $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$.

Решим это дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} = a \Leftrightarrow \dot{x} = at + c_1 \Leftrightarrow x = \frac{at^2}{2} + c_1 t + c_2,$$

где c_2 – координата в начальный момент $c_2 = x(0) = x_0$,

c_1 – начальная скорость $c_1 = \dot{x}(0) = v_0$.

г) $\ddot{x} + x = 0$.

Решениями этого уравнения являются функции $x = 0$, $x = \sin t$, $x = \cos t$.

Решением также будет и линейная комбинация этих функций:

$$x = c_1 \sin t + c_2 \cos t.$$

д) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

В данном случае это частные производные по x и по y функции двух независимых переменных $u = u(x, y)$. Решением этого уравнения являются, например, функции $u = 0$, $u = x + y + c$. Функции, удовлетворяющие этому уравнению, называются гармоническими функциями.

е) $\dot{x}(t) = x(t-1)$.
Решением является, например, функция $x \equiv 0$.

Последние два уравнения не являются обыкновенными дифференциальными уравнениями. д) – дифференциальное уравнение с частными производными, е) – дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом.

Задачи. 1) Придумайте как можно больше решений уравнения из примера е).

2) Имеет ли это уравнение решения вида $x = \lambda t$, если да, то при каких значениях λ?

ж) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$ или $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ – векторная неизвестная функция.

Решениями этого уравнения являются функции

$x = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

Все решения этого уравнения могут быть записаны, как мы покажем позже, в виде $x = c_1\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, где c_1 и c_2 – произвольные константы.

1.1.2. Определение ОДУ.

Определение. *Обыкновенным дифференциальным уравнением* (ОДУ) называется равенство, связывающие значение (возможно векторное) неизвестной функции одного вещественного аргумента при произвольном значении этого аргумента с некоторыми производными этой функции при том же значении аргумента. *Порядком* ОДУ называют сумму старших порядков производных всех скалярных функций, входящих в данное уравнение.

Замечание 1. Как отмечено при разборе примеров (а), (в), производные в ДУ иногда выражают через дифференциалы:

$$y' = \frac{dy}{dx},\ \dot{x} = \frac{dx}{dt},\ dx = \dot{x}dt,\ \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2},\ d^2x = \ddot{x}dt^2.$$

Замечание 2. Систему нескольких ДУ с несколькими неизвестными функциями (см. пример (ж)) можно рассматривать как одно ДУ с векторной неизвестной функцией.

Замечание 3. Если в уравнение входят произвольные постоянные, то уравнение считается бесконечной совокупностью уравнений. Например, уравнение

$$\dot{x} = at + c_1$$

из примера (в) содержит параметр a и произвольную постоянную c_1; поэтому оно представляет бесконечную совокупность уравнений, зависящих от параметра a:

$$\left[\begin{array}{l} \dot{x} = at + 2, \\ \dot{x} = at + 1, \\ \dot{x} = at + e, \\ \ldots \end{array}\right.$$

Её решениями являются, например, функции

$$x = \frac{at^2}{2} + 2t + 1, x = \frac{at^2}{2} + t + 2 ,$$

а функция

$$x = \frac{t^2}{2}$$

не является; она будет решением лишь для значения параметра $a = 1$.

1.1.3. Определение решения ОДУ.

Определение. *Решением ОДУ* называется функция, обладающая следующими свойствами:

1. Её область определения есть промежуток вещественной оси, т.е. не сводящийся к единственной точке отрезок, полуинтервал или интервал, возможно, бесконечный в одну или обе стороны.
2. При её подстановке уравнение превращается в тождество относительно независимой переменной и, если уравнение содержит дифференциалы, то и относительно приращения независимой переменной.
3. Если в уравнение входят произвольные постоянные, то она должна удовлетворять уравнению при каких-нибудь значениях произвольных постоянных.

Условие 1 не всегда включается в определение решения, однако оно удобно, так как облегчает описание множества всех решений. Например, множество всех решений уравнения $y' = 0$ на промежутке J описывается формулой $y \equiv c$. Для множества, состоящего, скажем, из двух не пересекающихся интервалов J_1 и J_2, множество всех решений пришлось бы описывать сложнее $y \equiv \begin{cases} c_1 \text{ } \textit{при } x \in J_1, \\ c_2 \text{ } \textit{при } x \in J_2 \end{cases}$.