МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

С. И.填 Мармо, А. В. Флегель, М. В. Фролов

ЛЕКЦИИ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Часть I
Электромагнитные явления в вакууме

Учебное пособие

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2018

Содержание

Микроскопическая теория электромагнитных явлений в вакууме

1. Уравнения электромагнитного поля

1.1. Законы электромагнетизма как результат обобщения опытных данных

Закон сохранения заряда. Способность элементарных частиц, микрочастиц и макротел участвовать в электромагнитном взаимодействии характеризуется электрическим зарядом, причем существуют заряды двух видов — положительные и отрицательные. Тела с одноименными зарядами отталкиваются, с разноименными — притягиваются. Опыт показывает, что во всех явлениях природы выполняется закон сохранения заряда: заряд не может ни возникать из ничего, ни исчезать, а только перераспределяется между телами. Это значит, что полный заряд Q в некоторой области пространства может измениться только за счет того, что заряженные частицы пересекают границу области. Введем понятие полного тока J как количества заряда, который пересекает границу области в единицу времени t. Будем считать, что $J > 0$, если заряд «вытекает» из области, и $J < 0$, если заряд «втекает» в область. Тогда закон сохранения заряда (в интегральной форме) может быть выражен уравнением

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -J. \tag{1.1}$$

Введем теперь понятие плотности заряда и плотности тока и перепишем (1.1) в другом виде. Пусть имеется тело с большим количеством заряженных частиц в нем. Разобьем объем V на малые элементы (физически бесконечно малые объемы) ΔV такие, что $\Delta V \ll V$, но в ΔV все еще содержится много элементарных зарядов, так что отношения типа $\Delta Q/\Delta V$, где $\Delta Q = \sum\limits_{e_i \in \Delta V} e_i$ — полный заряд внутри ΔV, мало меняются при изменении ΔV. Так как ΔV макроскопически мал, то его положение можно характеризовать единственным радиус-вектором $\mathbf{r}$, проведенным в какую-либо точку области ΔV. Назовем отношение

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{\Delta Q}{\Delta V} \tag{1.2}$$

объемной плотностью заряда в данной точке. Полный заряд во всем объеме

$$Q = \sum \Delta Q = \sum \rho \Delta V \longrightarrow \int\limits_V \rho(\mathbf{r}, t) dV.$$

Таким образом, для систем, в которых электрический заряд можно рассматривать как распределенный непрерывно, полный заряд есть интеграл от объемной плотности:

$$Q = \int\limits_V \rho(\mathbf{r}, t) dV. \tag{1.3}$$

Если в некоторой области пространства имеется только один заряд e_a, то, очевидно, объемную плотность нельзя ввести с помощью (1.2). Будем в этом случае исходить из соотношения (1.3) и определим ρ так, чтобы выполнялись равенства

$$Q = \int\limits_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = \begin{cases} e_a, & \mathbf{r}_a \in V, \\ 0, & \mathbf{r}_a \notin V. \end{cases}$$

Тогда, очевидно, $\rho(\mathbf{r}, t)$ можно записать через дельта-функцию:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)),$$

где $\mathbf{r}_a(t)$ — радиус-вектор заряда e_a. Напомним, что $\delta(x)$ определяется как функция, обладающая следующими свойствами:

1) функция равна нулю при всех $x < 0$ и при всех $x > 0$;

2) функция бесконечна при $x = 0$;

3) интеграл от этой функции, взятый в пределах от $-\infty$ до ∞, равен 1.

Аналогичным образом вводится трехмерная дельта-функция $\delta(\mathbf{r})$. Из свойств дельта-функции следует основное соотношение

$$\int\limits_V f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_a), \qquad \text{если } \mathbf{r}_a \in V,$$

которое было использовано при введении объемной плотности точечного заряда.

Если имеется несколько точечных зарядов, то плотность заряда дается выражением

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)). \tag{1.4}$$

Введем теперь плотность электрического тока

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \tag{1.5}$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ — скорость зарядов, и найдем, как $\mathbf{j}$ связана с током через поверхность. Выделим площадку dS с нормалью $\mathbf{n}$ ($d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ — вектор площадки) и вычислим ток, проходящий через dS. Пусть скорость зарядов в месте расположения площадки — $\mathbf{v}$, тогда в единицу времени площадку пересекут заряды, находящиеся внутри цилиндра с осью, параллельной $\mathbf{v}$, и высотой $(\mathbf{vn}) = v_n$ (рис. 1), т.е.

$$dJ = \rho v_n dS = (\rho \mathbf{v}, \mathbf{n})dS = (\mathbf{j}d\mathbf{S}).$$

Полный ток через произвольную площадку S конечных размеров

$$J = \int\limits_S \mathbf{j}d\mathbf{S}. \tag{1.6}$$

Если в объеме имеется несколько зарядов или заряды рассматриваются как точечные (что можно делать всегда), то из (1.4), (1.5) получаем

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \mathbf{v}_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)). \tag{1.7}$$

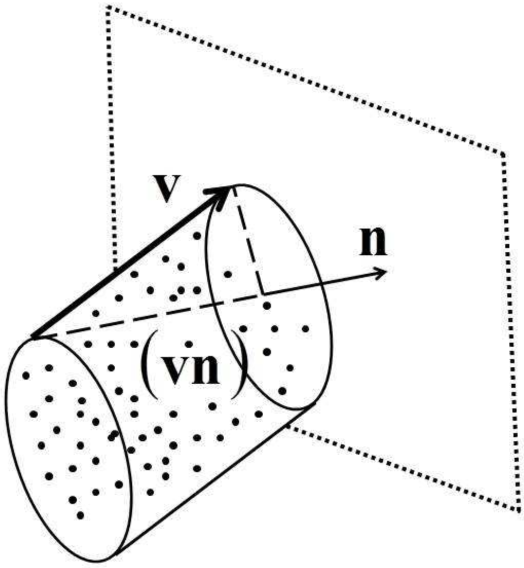

Рис. 1

Запишем теперь закон сохранения электрического заряда (1.1) для некоторого объема V, окруженного замкнутой поверхностью S в другой форме. Левую часть, учитывая (1.3), перепишем в виде

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_V \rho(\mathbf{r}, t)dV = \int\limits_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t}dV.$$

Чтобы преобразовать правую часть, воспользуемся теоремой Остроградского — Гаусса

$$\oint_S \mathbf{a} d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV \tag{1.8}$$

и выразим ток J через объемный интеграл от дивергенции $\mathbf{j}$

$$J = \oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV.$$

Подставляя в (1.1), получаем

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV.$$

Так как объем V выбран произвольно, то должны быть равны подынтегральные выражения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \tag{1.9}$$

Мы получили *уравнение непрерывности*, которое выражает *закон сохранения заряда в дифференциальной форме.*

Закон Кулона для электростатического взаимодействия зарядов. Принцип суперпозиции. Опыт показывает, что два неподвижных точечных заряда e_1 и e_2, находящихся на расстоянии r друг от друга, взаимодействуют по следующему закону (*закон Кулона*, 1785 г.):

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{e_1 e_2}{r^3} \mathbf{r}. \tag{1.10}$$

Здесь $\mathbf{F}_{12}$ — сила, с которой первый заряд действует на второй, $\mathbf{r}$ – вектор, проведенный от первого заряда ко второму.

Формула (1.10) записана в абсолютной системе единиц Гаусса СГС, которая используется во всем курсе [1]. В основу этой системы положены механические единицы (сантиметр, грамм и секунда), а единичный заряд определяется из закона Кулона, записываемого в форме (1.10).

Закон Кулона позволяет ввести понятие электрического поля, которое характеризуется напряженностью. Можно сказать, что всякий неподвижный точечный заряд e окружен *электрическим полем* с *напряженностью*

$$\mathbf{E} = \frac{e}{r^3} \mathbf{r}. \tag{1.11}$$

[1] Система СГС используется в книгах [1, 2, 3, 4, 5, 6], а система СИ — в [7, 8]. Обсуждение различных систем единиц см. в [2].

Заряд e', находящийся в поле $\mathbf{E}$, испытывает действие силы $\mathbf{F} = e'\mathbf{E}$.

Опыт показывает, что напряженности электрического поля от нескольких неподвижных зарядов складываются как обычные векторы:

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i.$$

В этом состоит *принцип суперпозиции.*

Теорема Гаусса. Вычислим поток вектора $\mathbf{E}$ через произвольную замкнутую поверхность:

$$\Pi = \oint \mathbf{E} d\mathbf{S}.$$

Пусть поле создается одним точечным зарядом, который находится в начале координат: $\mathbf{E} = e\mathbf{r}/r^3$. Имея в виду применение формулы Остроградского — Гаусса, подсчитаем $\operatorname{div}\mathbf{E}$. Так как

$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \left(\nabla, \frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3}\operatorname{div}\mathbf{r} + \left(\operatorname{grad}\frac{1}{r^3}, \mathbf{r}\right) = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0, \quad \text{если} \quad r \neq 0,$$

то

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = e\operatorname{div}\frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0, \quad r \neq 0. \tag{1.12}$$

Рассмотрим два случая.

1. Заряд вне объема.

Чтобы вычислить поток, переходим к объемному интегралу от дивергенции (1.8) и с учетом (1.12) находим:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int \operatorname{div}\mathbf{E}\, dV = 0. \tag{1.13}$$

2. Заряд внутри объема.

Окружим заряд сферой радиусом R. Применим результат предыдущего пункта к поверхности, составленной из S и поверхности сферы S_R (нормаль к сфере направляем наружу). Заряд находится вне объема, ограниченного этой поверхностью, поэтому

$$\oint\limits_S \mathbf{E} d\mathbf{S} - \oint\limits_{S_R} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int\limits_V \operatorname{div}\mathbf{E} dV = 0,$$

так что

$$\oint\limits_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint\limits_{S_R} \mathbf{E} d\mathbf{S}.$$

Поток через поверхность S_R нетрудно вычислить:

$$\oint\limits_{S_R} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint\limits_{S_R} \frac{e\mathbf{R}}{R^3} d\mathbf{S} = \frac{e}{R^2}\oint\limits_{S_R} dS = 4\pi e.$$