Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Кафедра теоретической информатики

В.С. Рублев

Элементы комбинаторики

(*индивидуальные работы № 2 и 3 по дисциплине*

«Основы дискретной математики»)

Методические указания

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по
специальности Информационные технологии

Ярославль 2009

УДК 519.2
ББК В174я73
Р82

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2009 года

Рецензенты:
кафедра теоретической информатики Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова

Р82 **Рублев, В.С.** Элементы комбинаторики: метод. указания / В.С. Рублев; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2009. – 76 с.

Методические указания содержат варианты индивидуальных заданий по теме “Элементы комбинаторики” дисциплины “Основы дискретной математики”, а также необходимый материал для самостоятельного изучения этой темы и выполнения индивидуального задания. Для качественного усвоения курса издание содержит подробные определения, примеры, иллюстрации и обоснования.

Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 010400 Информационные технологии (дисциплина “Основы дискретной математики”, блок ЕН), очной формы обучения.

УДК 519.2
ББК В174я73

Содержание

1 Предмет “Комбинаторика”

Комбинаторика — раздел математики, занимающийся задачами выбора и расположения элементов некоторого конечного множества (*базового*) в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет комбинации из элементов базового множества, называемые **комбинаторной** конфигурацией или **моделью**. Комбинаторика

ŋqdqɏeɎ bɆ dedɆbɎɜә d ɕɔabɔɏ ɈqddɎqɏè

занимается вопросами существования комбинаций определенной комбинаторной модели, алгоритмами их построения и перебора, а также решением задач перечисления (в частности, вычисления количества комбинаций для комбинаторной модели).

Комбинаторика имеет приложения во многих разделах математики: теории вероятностей, математической логике, теории чисел, информатике и кибернетике. Она использует современный мощный аппарат для решения сложных задач, но в курсе “Основы дискретной математики” излагаются наиболее **простые комбинаторные модели**: *перестановки* (каким числом способов можно расположить заданные объекты), *сочетания* (каким числом способов можно образовать подмножество с определенным количеством из имеющихся объектов), *размещения* (каким числом способов можно разместить на определенном количестве мест объекты или их часть), а также **2 комбинаторных правила** *умножения* и *сложения*, позволяющие из простых комбинаторных моделей строить более сложные и подсчитывать число их комбинаций.

В указанных трех основных комбинаторных моделях элементы базового множества могут не повторяться (*комбинации без повторения*) или повторяться (*комбинации с повторениями*). Поэтому мы будем рассматривать все 6 основных комбинаторных моделей.

Так как *комбинаторное правило умножения* применяется не только при использовании более сложных комбинаторных моделей, но и для подсчета числа комбинаций простых моделей, то в первую очередь займемся его изложением.

2 Комбинаторное правило умножения

Комбинаторное правило умножения связано с *прямым произведением множеств* и подсчетом числа его элементов. Прямым произведением двух множеств A и B называется множество

$$A \times B = \{(a, b) |\ a \in A \ \wedge \ b \in B\}.$$

Число элементов такого прямого произведения $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. Эта формула выводится следующим образом. Каждый элемент $a_0 \in A$ сочетается с любым из $|B|$ элементов $b \in B$, а потому имеется $|B|$

ŋddqɐeʎ bɆ dəqɆbʎɐɘ d ɐɔɐqɔʎ Ɛqddʎqɐè

элементов вида (a_0, b), и следовательно, $|\{a_0\} \times B| = |B|$. Так как это справедливо для любого элемента $a \in B$, то

$$|A \times B| = \sum_{a \in A} |\{a\} \times B| = |A| \cdot |B|.$$

В общем случае произвольного числа множеств A_i $(i \in \overline{1, n})$

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, \ldots, a_n)|\ a_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge a_n \in A_n\}$$

и число элементов прямого произведения определяется формулой произведения чисел элементов для каждого из множеств

$$|\prod_{i=1}^{n} A_i| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Эта формула выводится методом математической индукции.

Комбинаторное правило умножения связано с *генерацией комбинаций* при помощи последовательности действий, определяющих ту или иную часть каждой комбинации. Для этого комбинацию нужно разделить на несколько частей (т. е. представить как кортеж этих частей) и последовательно генерировать каждую часть. Формально схему можно описать следующим образом:

1. Выбор 1-й части комбинации – n_1 способов.
2. Выбор 2-й части комбинации – n_2 способов.

   ....

k. Выбор k-й части комбинации – n_k способов.

Пусть выполнены следующие условия:

- любая генерация дает некоторую комбинацию модели;
- каждая комбинация модели может быть получена при помощи генерации;
- действия генерации независимы – разные части комбинации определяются разными действиями, и потому любая комбинация может быть получена единственным способом;