



<http://shop.rcd.ru>

- физика
- математика
- биология
- техника

Аминов Л.К.

Теория симметрии (конспекты лекций и задачи). Учебное пособие для студентов третьего курса и магистрантов физического факультета. — Москва: Институт компьютерных исследований, 2002, 192 с.

Настоящее пособие составлено на основе курса лекций “Дополнительные главы математики”, которые в течение многих лет читались автором для студентов, специализирующихся по теоретической физике, курса по выбору “Теория симметрии” для студентов третьекурсников и курса “Дополнительные главы математики с приложениями” для магистрантов физического факультета. Содержание лекций в основном представлено в форме краткого конспекта; более подробно изложены темы, по которым выполняются лабораторные задания. Задачи по каждому разделу решаются студентами на практических занятиях и самостоятельно. В целом данное пособие предназначено помочь студентам во внеаудиторной работе с рекомендованной литературой.

Рецензент: член-корр. РАН, доктор ф.-м. наук, профессор К.М.Салихов.

© Институт компьютерных исследований, 2002

© Л.К.Аминов, 2002

<http://rcd.ru>

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	11
1. Основные понятия теории групп. Примеры групп	
1.1. <i>Определение группы</i>	15
Групповые аксиомы. Коммутативные группы. Подгруппы. Конечные и непрерывные группы, смешанные группы. Порядок конечной группы. Компактные непрерывные группы	
1.2. <i>Примеры групп</i>	15
Векторные пространства, общая линейная группа $GL(n)$, унитарная группа $U(n)$, унитарная унимодулярная группа $SU(n)$, группа вращений O_3^+ , полная ортогональная группа O_3 , группа движений евклидова пространства, группа трансляций кристаллической решетки, симметрическая группа n -ой степени P_n (группа перестановок), точечные группы симметрии	
1.3. <i>Порождающие множества элементов</i>	17
Циклические подгруппы, порядок элементов группы. Системы образующих группы и определяющие соотношения	
1.4. <i>Теорема Лагранжа</i>	18
Смежные классы по подгруппе. Индекс подгруппы	
1.5. <i>Классы сопряженных элементов</i>	18
Сопряженные вращения, перестановки; схемы Юнга.	
1.6. <i>Инвариантные подгруппы. Гомоморфизмы групп</i>	20
Сопряженные подгруппы. Фактор-группа. Изоморфизм и гомоморфизм групп. Ядро гомоморфизма. Основная теорема о гомоморфизме.	
1.7. <i>Прямое произведение групп</i>	21
1.8. <i>Теорема Кэли</i>	21
Таблица умножения конечной группы	

1.9. Точечные группы симметрии	22
Элементы симметрии: оси, зеркально-поворотные оси, плоскости симметрии, центр симметрии. Двусторонние оси. Группы C_n , S_{2n} , C_{nh} , C_{nv} , D_n , D_{nh} , D_{nd} , T , T_d , O , O_h , Y , Y_h , T_h . Понятие об интернациональной системе обозначений	
1.10. Некоторые дополнительные сведения	24
Полугруппы. Центр группы, нормализатор подмножества группы, p -группы, коммутатор элементов группы, коммутант группы, производный ряд группы. Совершенные, разрешимые группы. Нормальный ряд группы, транзитивные группы, свободные группы, полупрямые произведения, сплетения групп. Группы Ли. Понятие о классификации конечных групп	
ЗАДАЧИ	26
2. Линейные представления групп	
2.1. Определение представлений	29
Линейное представление, размерность представления. Представления точные, унитарные, эквивалентные, приводимые, неприводимые	
2.2. Разложение приводимых унитарных представлений	30
Полная приводимость унитарных представлений. Унитарность представлений конечных групп	
2.3. Лемма Шура и ее следствия	30
Первая и вторая леммы Шура. Соотношения ортогональности матричных элементов неприводимых представлений	
2.4. Характер представления	31
Характер элемента группы, характер представления. Соотношения ортогональности характеров НП. Критерий неприводимости	
2.5. Регулярное представление конечной группы	32
Соотношения Бернсайда	
2.6. Комплексно-сопряженные представления	33
Потенциально-вещественные, псевдовещественные представления	
2.7. Прямое произведение представлений группы	33
Прямое произведение пространств, операторов, матриц, представлений. Тензорные представления	
2.8. Представления прямого произведения групп	34

2.9. Метод Бете вычисления характеров НП конечных групп	35
Структурные коэффициенты группы	
2.10. Другие методы вычисления характеров	35
Теорема Фробениуса	
2.11. Фактическое разложение приводимого представления	36
Канонический базис, его неоднозначность. Операторы проектирования, поворотов	
2.12. Элементы групповой алгебры	38
Матричные алгебры. Групповая алгебра. Коммутаторная алгебра. Идеалы алгебры. Производящие идемпотенты. Прimitивные идемпотенты. Центр алгебры. Взаимосвязь групповой алгебры и коммутаторной алгебры произвольного представления группы	
ЗАДАЧИ	39
 3. Группа вращений	
3.1. Одноосные вращения	42
Инфинитезимальные операторы представлений. Понятие о многозначных представлениях	
3.2. Группа вращений в трехмерном пространстве	42
Пространство группы, углы Эйлера. Инвариантный интеграл	
3.3. Неприводимые представления группы вращений	44
Инфинитезимальные операторы представлений, их свойства. Канонический базис. Вес представления. Характеры неприводимых представлений. Представления сферическими функциями. Двухзначные представления	
3.4. Гомоморфизм двумерной унитарной унимодулярной группы на группу вращений	46
Параметры Кэли-Клейна. Матрицы Паули	
3.5. Произведения НП группы вращений (или $SU(2)$) и их разложение	48
Тензорные представления	
3.6. Спиноры и спинорные представления	49
Ковариантные компоненты спинора. Симметричные спиноры	
3.7. Матрицы неприводимых представлений группы вращений	50
Обобщенные сферические функции	

3.8. Коэффициенты Клебша-Гордона	52
3.9. $3j$ -символы и их свойства	53
Переход к комплексно-сопряженным представлениям.	
3.10. $6j$ - и $9j$ -символы	54
3.11. Полная ортогональная группа в трех измерениях	57
3.12. Двухзначные представления точечных групп	57
Двойные точечные группы	
3.13. Группы Ли и алгебры Ли	59
Алгебры Ли, структурные константы. Представления алгебр Ли, теорема Адо. Связь между группами Ли и алгебрами Ли, экспоненциальное отображение алгебр Ли на группы Ли	
ЗАДАЧИ	62

4. Некоторые физические приложения теории групп

4.1. Влияние симметрии на физические свойства кристаллов	64
Принцип Неймана. Тензорные инварианты. Тензор модулей упругости	
4.2. Нормальные колебания симметричных молекул	66
Нормальные координаты, кратные частоты. Типы нормальных колебаний. Нормальные координаты октаэдрической молекулы XY_6 и пирамидальной молекулы XY_3	
4.3. Классификация уровней энергии и стационарных состояний квантовомеханической системы по НП группы симметрии	74
Преобразование функции при преобразовании ее аргументов. Группа симметрии гамильтониана. Законы сохранения	
4.4. Применение теории групп к вычислению матричных элементов	75
Неприводимые тензорные операторы. Приведенные матричные элементы. Коэффициенты Клебша-Гордона. Теорема Вигнера-Экарта	
4.5. Теория возмущений	76
4.6. Метод молекулярных орбиталей	77
Метод МО ЛКАО. Симметричные орбитали октаэдрической и пирамидальной молекул	
4.7. Элементы теории кристаллического поля	79
4.8. Метод эквивалентных операторов	82
ЗАДАЧИ	83

5. Обращение времени

5.1. <i>Антиунитарность оператора обращения времени</i>	85
Оператор комплексного сопряжения. Нормальная форма антиунитарного оператора	
5.2. <i>Различные представления оператора обращения времени</i>	86
Два класса физических величин по отношению к обращению времени	
5.3. <i>Определение копредставлений</i>	87
Перестановочность оператора обращения времени с операторами пространственных преобразований. Типы неприводимых копредставлений	
5.4. <i>Теорема Крамерса</i>	89
5.5. <i>Правила отбора матричных элементов, связанные с обращением времени</i>	89
5.6. <i>Формализм спиновых гамильтонианов</i>	89
ЗАДАЧИ	91

6. Пространственные группы и их представления

6.1. <i>Определение пространственной группы</i>	93
Винтовые вращения, скользящие отражения. Решетка Бравэ. Базисные векторы решетки, элементарная ячейка	
6.2. <i>Типы решеток Бравэ</i>	94
Точечная группа симметрии решетки. Кристаллические сингонии. Однотипные решетки. Параллелепипед Бравэ. Подчинение систем	
6.3. <i>Кристаллические классы. Неэлементарные трансляции</i>	96
Макроскопическая симметрия кристалла. Структура алмаза	
6.4. <i>Унитарные НП группы трансляций</i>	98
Обратная решетка. Зоны Бриллюэна. Ячейка Вигнера-Зейтца	
6.5. <i>Теорема Блоха</i>	99
Блоховские функции	
6.6. <i>Представления пространственных групп</i>	100
Звезда представления. Неприводимость звезд неприводимых представлений. Группа волнового вектора. Малое представление. Построение представления с неприводимой звездой по малому	

представлению. Связь представлений пространственных групп с проективными представлениями точечных групп. Фактор-системы проективных представлений	
6.7. <i>Некоторые неприводимые представления группы O_h</i>	103
6.8. <i>Аппроксимация группы трансляций конечной группой</i>	104
Периодические граничные условия. Критерий вещественности НП	
6.9. <i>Элементы теории проективных представлений</i>	105
<i>p</i> -эквивалентные представления и фактор-системы. Мультипликатор группы. Группа представлений группы	
6.10. <i>Магнитные и цветные группы</i>	106
ЗАДАЧИ	107

7. Группа перестановок, полная линейная группа и некоторые ее подгруппы

7.1. <i>Симметризаторы Юнга и их свойства</i>	109
Схемы Юнга, таблицы Юнга, симметризаторы Юнга. Комбинаторная лемма	
7.2. <i>Разложение регулярного представления</i>	112
7.3. <i>Формулы Фробениуса для характеров групп перестановок</i>	113
7.4. <i>Графические методы вычисления характеров НП групп перестановок</i>	114
Стандартные таблицы, решеточные перестановки. Правила ветвления. Сопряженные разбиения и представления	
7.5. <i>Матрицы НП групп перестановок</i>	116
Символы Яманучи. Правила построения матриц транспозиций	
7.6. <i>Внешние произведения представлений симметрической группы</i>	117
Правила разложения внешних произведений	
7.7. <i>Связь между НП групп перестановок и линейных преобразований</i>	118
Неприводимые тензоры группы $GL(n)$. Размерность НП группы $GL(n)$. НП групп $SL(n)$, $U(n)$, $SU(n)$	
7.8. <i>Неприводимые представления ортогональной и симплектической групп</i>	120
Свертка тензоров. Тензоры с нулевым следом	
7.9. <i>Разложение НП группы $U(n)$ по НП группы $O^+(n)$</i>	123

7.10. <i>Некоторые приложения к теории атомных спектров</i>	123
Принцип Паули. Атомные спектры в схеме связи Рессела-Саундерса. Старшинство в атомных спектрах ЗАДАЧИ	126
8. Группы Лоренца и Пуанкаре	
8.1. <i>Определение групп Лоренца и Пуанкаре</i>	128
Общая и специальная (собственная ортохронная) группа Лоренца. Бусты (“чисто лоренцевы” преобразования). Параметризации групп Лоренца и Пуанкаре	
8.2. <i>Элементы специальной теории относительности</i>	129
Замедление времени, сокращение расстояний, сложение скоростей. Световой конус. Преобразования Галилея, группа Галилея	
8.3. <i>Гомоморфизм двумерной унимодулярной группы на группу Лоренца</i>	131
Связь между 4-векторами и эрмитовыми матрицами второго порядка	
8.4. <i>Спиноры и спинорные представления группы Лоренца</i>	133
Спиноры первого и второго рода. Пунктирные индексы. Неприводимые спин-тензорные представления группы $SL(2)$, их неунитарность. Спинорные представления группы Лоренца с пространственной инверсией	
8.5. <i>Инфинитезимальные операторы групп Лоренца и Пуанкаре</i>	135
Соотношения коммутации инфинитезимальных операторов. Операторы Казимира групп Лоренца и Пуанкаре. Нерелятивистские аналоги инфинитезимальных операторов и коммутационных соотношений	
8.6. <i>Унитарные неприводимые представления группы Пуанкаре</i>	139
Импульсное представление. “Частицы”, их массы и спины, спиральность. Добавление пространственной инверсии	
8.7. <i>Спиральный и спинорный базисы НП группы Пуанкаре с $m^2 > 0$</i>	141
Инфинитезимальные операторы в спиральном и спинорном базисах	
8.8. <i>Элементы квантовой теории полей</i>	145
Правила суперотбора, когерентные пространства. Калибровочные (градиентные первого рода) преобразования. Заряды. Операторы рождения и уничтожения частиц. Функция Паули-Йордана. Уравнения Клейна-Гордона, Вейля. Аксиома асимптотической полноты. Оператор рассеяния, матрица рассеяния. Т-матрица	

8.9. Пространственно-временные отражения. CPT – теорема	149
Комплексная группа Лоренца. 4-инверсия. CPT-преобразования одно- и многочастичных состояний. Внутренняя четность частиц	
ЗАДАЧИ	151
9. Унитарные симметрии	
9.1. Внутренняя симметрия элементарных частиц. Изоспин	153
Калибровочные симметрии, изоспиновая (изотопическая) симметрия. Зарядовые (изоспиновые) мультиплеты. Гиперзаряд. Унитарные мультиплеты	
9.2. Группы $SU(n)$. Инфинитезимальные операторы групп	155
Фундаментальные представления. Структурные постоянные. Операторы Казимира.	
9.3. Неприводимые представления группы $SU(3)$	157
Комбинаторное построение НП по методике главы 7. Инфинитезимальный подход к построению НП. I -, U - и V - “спины” (диаграммная техника). Разложение произведения двух НП группы $SU(3)$	
9.4. Классификация адронов по $SU(3)$ -мультиплетам. Нарушение $SU(3)$ -симметрии	164
Адроны — барионы и мезоны. Расщепление $SU(3)$ -мультиплетов на изомультиплеты (массовая формула Гелл-Мана - Окубо)	
9.5. Кварковые модели	166
$SU(6)$ - ароматосимметрия. Ароматы частиц. Цвет кварков	
ЗАДАЧИ	169
ЛИТЕРАТУРА	170
ПРИЛОЖЕНИЯ	
1. Сферические гармоники порядков 1 — 6	172
2. Справочные данные по группам O_h (октаэдра) и D_{6h}	173
ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ	182