МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ. СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Учебно-методическое пособие
для лекционных занятий в вузах

Составители:
В.П. Трофимов,
А.П. Карпова,
М.Н. Небольсина

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2012

ŋqdqɣeɣ bɆ deb∄bɣɜe d ɐɔɑbɔɣ Ɉqdqɣqɣѐ

ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Интерполяция алгебраическими многочленами

1. 1. Постановка задачи интерполяции

Пусть для функции $f: X \to R$, $X \subset R$ известны ее значения в $(n+1)$-й точках $x_i \in X$, $i = 0, \ldots, n$. Запишем эти значения функции f в табл. 1.1

Таблица 1.1

x	x_0	x_1	…	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	…	$f(x_n)$

Далее будем считать, что выполнено условие

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b.$$

Задача приближенного вычисления для заданной табл. 1.1 значения функции $f(x)$ при $x \ne x_i$, $i = 0, \ldots, n$ называется **задачей интерполяции** (распространения внутрь).

Решение этой задачи можно найти следующим образом: строится алгебраический многочлен степени не выше n

$$P_n(x; x_0, x_1, \ldots, x_n; f) = P_n(x; f), \tag{1.1}$$

принимающий в точках $x_0, x_1, \cdots, x_n$ те же значения, что и функция f :

$$f(x_i) = P_n(x_i; f), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Интерполяционным многочленом (интерполянтой) для табл. 1.1 называется многочлен (1.1) степени не выше n, удовлетворяющий условию (1.2). Точки $x_0, x_1, \cdots, x_n$ называются **узлами интерполяции**.

Вычисление значения $f(x)$ при $x \ne x_i$, $i = 0, \ldots, n$ по формуле

$$f(x) \approx P_n(x; f) \tag{1.3}$$

называется **интерполяцией функции f с помощью алгебраического многочлена.**

Замечание 1.1. Если $x \notin [a; b]$, то вычисление $f(x)$ с помощью (1.3) называют **экстраполяцией**.

Замечание 1.2. Существуют различные формы записи интерполяционного многочлена.

Теорема 1.1. *Для табл. 1.1 интерполяционный многочлен существует и единственен.*

Доказательство. Запишем интерполяционный многочлен в виде

$$P_n(x; x_0, x_1, \ldots, x_n; f) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

2) многочлен

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$$

равен 1 при $x = x_k$ и равен нулю во всех остальных узлах.

Итак, для любого $k = 0, \ldots, n$

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}.$$

Введем многочлен $\omega(x)$ $(n+1)$-й степени, построенный по узлам интерполяции:

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n).$$

Заметим, что производная многочлена $\omega(x)$ в точке x_k

$$\omega'(x_k) = (x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n).$$

Теперь многочлен $l_k^{(n)}(x)$ можно записать в виде

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\,\omega'(x_k)}. \tag{1.5}$$

По построению многочлен $f(x_k)\, l_k^{(n)}(x)$ имеет степень n, принимает в узле x_k значение $f(x_k)$ и равен нулю во всех остальных узлах интерполяции.

Следовательно, многочлен

$$L_n(x;f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\cdot l_k^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\frac{\omega(x)}{(x-x_k)\,\omega'(x_k)} \tag{1.6}$$

является интерполяционным многочленом для табл. 1.1 (имеет степень не выше n и $L_n(x_i;f) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$).

Формулу (1.6) называют **интерполяционной формулой Лагранжа,** а полином $L_n(x;f)$ – **интерполяционным многочленом Лагранжа.**

Замечание 1.4. Число арифметических операций, необходимых для вычисления по формуле (1.6), имеет порядок $O(n^2)$.

Пример. Найдем интерполяционный многочлен Лагранжа для $n = 1$. В этом случае формула (1.6) примет вид

$$L_1(x;f) = f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{f(x_0)(x-x_1)-f(x_1)(x-x_0)}{x_0-x_1}.$$

Графиком функции $L_1(x;f)$ является прямая, проходящая через точки $(x_0; f(x_0))$ и $(x_1; f(x_1))$. Такая полиномиальная интерполяция называется **линейной полиномиальной** (не путать с линейным интерполированием (см. важное замечание 1.1)).

ŋdqdqyeɤ bɆ dədɆbɤəɐ d ɐɑɑcɐɣ ɟdqdɤqyè

Задание. Найдите интерполяционные многочлены Лагранжа для $n = 2, 3$.

Замечание 1.5. Поскольку интерполяционный многочлен (1.6) линейно зависит от значений функции $f(x_i)$, то интерполяционный многочлен для суммы функций равен сумме интерполяционных многочленов слагаемых.

1.3. Погрешность интерполяции

Погрешностью интерполяции называется разность

$$r_n(x; f) = f(x) - P_n(x; f). \tag{1.7}$$

Очевидно, что в узлах интерполяции $x_0, x_1, \cdots, x_n$

$$r_n(x_i; f) = f(x_i) - P_n(x_i; f) = 0.$$

В остальных точках погрешность интерполяции, вообще говоря, отлична от нуля.

Замечание 1.6. Из предложения 1.1 следует, что погрешность интерполяции $r(x_i; f) \equiv 0$ для любой функции $f \in \mathrm{P}^{(n)}$, где $\mathrm{P}^{(n)}$ – пространство многочленов степени не выше n.

Найдем погрешность интерполяции для многочлена степени $n+1$ ($f \in \mathrm{P}^{(n+1)}$, $\deg f = n+1$).

В этом случае $r_n(x; f) = f(x) - P_n(x; f)$ есть многочлен степени $n+1$ и узлы интерполяции x_k, $k = 0, \ldots, n$ являются его корнями.

Следовательно,

$$r_n(x; f) = c \cdot \omega(x) = c \cdot (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n), \tag{1.8}$$

где $c = \mathrm{const}$.

Продифференцировав по x это равенство $n+1$ раз, получим

$$r_n^{(n+1)}(x; f) = f^{(n+1)}(x) - P_n^{(n+1)}(x; f) = f^{(n+1)}(x) = c \cdot (n+1)!,$$

так как $P_n(x; f)$ – многочлен степени n, то $P_n^{(n+1)}(x; f) \equiv 0$.

Отсюда найдем $c = \dfrac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}$. Таким образом, для $f \in \mathrm{P}^{(n+1)}$ погрешность интерполяции имеет вид

$$r_n(x; f) = c \cdot \omega(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\,\omega(x). \tag{1.9}$$

Однако для произвольной функции, заданной только табл. 1.1, ничего конкретного сказать о погрешности интерполяции нельзя.

Если функция $f \in C^{(n+1)}[a; b]$ ($C^{(n+1)}[a; b]$ – пространство функций, $n+1$ раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a; b]$), то для погрешности интерполяции можно получить формулу, аналогичную (1.8).

Теорема 1.2. *Если* $f \in C^{(n+1)}[a; b]$, *то для любого* $x \in [a; b]$ *погрешность интерполяции определяется формулой*

$$
r_n(x; f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega(x), \tag{1.10}
$$

где ξ *– некоторая точка отрезка* $[a; b]$ $(\xi = \xi(x) \in [a; b])$.

Доказательство. Будем разыскивать погрешность интерполяции в виде (1.8), положив $c = c(x)$,

$$
r_n(x; f) = c(x) \cdot \omega(x).
$$

Зафиксируем произвольное $x \in [a; b]$, $x \neq x_i$, $i = 0, \ldots, n$ и рассмотрим вспомогательную функцию φ от переменной z:

$$
\begin{aligned}
\varphi(z) &= r_n(z; f) - c(x)\omega(z) = \\
&= f(z) - P_n(z; f) - c(x)\omega(z).
\end{aligned}
$$

Очевидно, что $\varphi \in C^{(n+1)}[a; b]$ и обращается в нуль в $n + 2$ точках отрезка $[a; b]$: $z = x, x_0, x_1, \cdots, x_n$. По теореме Ролля функция φ' (производная от функции φ по z) обращается в нуль по крайней мере в $n + 1$ точках отрезка $[a; b]$, при этом $\varphi' \in C^{(n)}[a; b]$, функция φ'' равна нулю по крайней мере в n точках этого отрезка, $\varphi'' \in C^{(n-1)}[a; b]$ и так далее.

Таким образом, $\varphi^{(n+1)}(z)$ $\left(\varphi^{(n+1)} \in C[a; b]\right)$ обращается в нуль по крайней мере в одной точке $\xi \in [a; b]$ и $\xi = \xi(x)$.

Учитывая, что для любого x

$$
P_n^{(n+1)}(x; f) \equiv 0 \text{ и } \omega^{(n+1)}(x) \equiv (n+1)!,
$$

получаем

$$
\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - c(x) \cdot (n+1)! = 0.
$$

Следовательно,

$$
c(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}
$$

и

$$
r_n(x; f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega(x),
$$

где $\xi = \xi(x) \in [a; b]$.

Теорема доказана.

Важное замечание 1.2. Из формулы (1.10) следует, что погрешность интерполяции зависит от выбора узлов интерполяции $x_0, x_1, \cdots, x_n$ и гладкости функции f.