ФМИ
к 218
5

~~6629~~

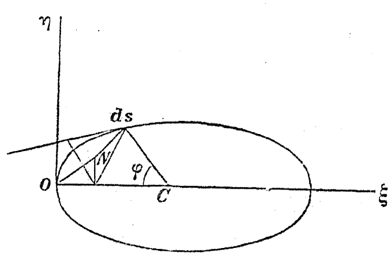
# ЗАМѢТКА О ДВИЖЕНІИ ВИХРЕВЫХЪ КОЛЕЦЪ.

**Н. Е. Жуковскаго.**

Сообщено въ засѣданіи Математическаго Общества 1907 г. 27 февраля.

§ 1. Обыкновенно предполагаютъ, что вся жидкость, заключенная въ вихревомъ кольцѣ, имѣетъ вихревое движеніе. Мы имѣемъ въ виду въ этой замѣткѣ разсмотрѣть задачу о движеніи круглаго вихревого кольца, несущаго заключенную въ немъ жидкость поступательнымъ движеніемъ и имѣющаго на поверхности вихревой слой.

§ 2. Опредѣлимъ сначала скорость, сообщаемую безконечно тонкимъ вихревымъ кольцомъ съ центромъ $C$ и радіусомъ $a$ точкѣ жидкости $N$, отстоящей отъ окружности кольца на весьма маломъ разстояніи $\rho$ (фиг. 1). Проведемъ чрезъ $N$ плоскость




Фиг. 1.

перпендикулярную кольцу и построимъ на ней прямоугольныя оси координатъ, принявъ начало $o$ на окружности кольца и

ђqqqyeY bɆ dəqɆbYɜə p eɜɔqɔɔʎ Ɉqqqyqyè



направивъ ось $o\xi$ по радіусу кольца, а ось $o\eta$ перпендикулярно къ плоскости кольца. Суммируя эффекты всѣхъ элементовъ $ds = ad\varphi$ на точку $N$, найдемъ для проекцій $v$ и $u$ скорости этой точки на оси $o\eta$ и $o\xi$ слѣдующія выраженія:

$$v = \frac{k}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[a^2(1-\cos\varphi) + a\xi\cos\varphi]\,d\varphi}{\left\{2(a^2 - a\xi)(1-\cos\varphi) + \rho^2\right\}^{\frac{3}{2}}}, \qquad \ldots \tag{1}$$

$$u = -\frac{k}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a\eta\cos\varphi\,d\varphi}{\left\{2(a^2 - a\xi)(1-\cos\varphi) + \rho^2\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Здѣсь $k$ есть безконечно малая циркуляція скорости по контуру, охватывающему кольцо такъ, что напряженія вихревого кольца есть $m = \frac{k}{2}$, а $\xi$ и $\eta$ суть координаты точки $N$.

Преобразуемъ интегралъ:

$$A = \frac{k}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^2(1-\cos\varphi)\,d\varphi}{\left\{2(a^2 - a\xi)(1-\cos\varphi) + \rho^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \tag{2}$$

подстановкою $\varphi = 2\theta$ и отбрасываніемъ $\frac{\xi}{a}$:

$$A = \frac{k}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{a^2\sin^2\theta\,d\theta}{\left\{4(a^2 - a\xi)\sin^2\theta + \rho^2\right\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{2k}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2\sin^2\theta\,d\theta}{(4a^2\sin^2\theta + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Вообразимъ уголъ $\psi$ безконечно малый, но весьма большой сравнительно съ безконечно малой величиною $\rho$, такъ что

ђqqqyeY bɆ dəqɆbYɜə p eɜɔqɔɔʎ Ɉqqqyqyè

$\frac{\rho}{\psi}=0$, и разобьемъ нашъ интегралъ $A$ на два:

$$A=\frac{2k}{\pi}\int_0^{\psi}\frac{a^2\theta^2 d\theta}{(4a^2\theta^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{k}{4\pi a}\int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta}=\frac{k}{2\pi}\left\{\int_0^{\psi}\frac{d\theta}{\sqrt{4a^2\theta^2+\rho^2}}-\right.$$

$$\left.-\int_0^{\psi}\frac{\rho^2 d\theta}{(4a^2\theta^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2a}\int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta}\right\}.$$

Мы имѣемъ:

$$\frac{k}{2\pi}\int_0^{\psi}\frac{d\theta}{\sqrt{4a^2\theta^2+\rho^2}}=\frac{k}{4\pi a}\int_0^{\psi}\frac{\frac{2a d\theta}{\rho^2}}{\sqrt{\frac{4a^2\theta^2}{\rho^2}+1}}=$$

$$=\frac{k}{4\pi a}\Big|_0^{\psi}\lg\left[\frac{2a\theta}{\rho}+\sqrt{\frac{2a\theta}{\rho}+1}\right]=\frac{m}{2\pi a}\lg\left(\frac{4a\psi}{\rho}\right),$$

$$\frac{k}{2\pi}\int_0^{\psi}\frac{\frac{\rho^2 d\theta}{\theta^2}}{\left(4a^2+\frac{\rho^2}{\theta^2}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{k}{2\pi}\Big|_0^{\psi}\frac{1}{\sqrt{4a^2+\frac{\rho^2}{\theta^2}}}=\frac{m}{2\pi a}$$

$$\frac{k}{4\pi a}\int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sin\theta}=\frac{k}{4\pi a}\Big|_{\psi}^{\frac{\pi}{2}}\lg\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=-\frac{m}{2\pi a}\lg\frac{\psi}{2}$$

На основаніи всего сказаннаго выраженіе $A$ будетъ такое:

$$A=\frac{m}{2\pi a}\left\{\lg\frac{8a}{\rho}-1\right\}. \qquad (2')$$