

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.М.Кытманов, С.Г.Мысливец

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ИХ
ПРИЛОЖЕНИЯ В МНОГОМЕРНОМ КОМПЛЕКСНОМ
АНАЛИЗЕ

Красноярск
СФУ
2010

УДК 517.55
ББК 22.161.5
К 97

Рецензенты: С.В.Знаменский, д-р физ.-мат. наук;
В.В.Чуешев, д-р физ.-мат. наук

Кытманов А.М.

К 97 Интегральные представления и их приложения в многомерном комплексном анализе: монография / А.М.Кытманов, С.Г.Мысливец. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2010. — 389 с.

ISBN 978-5-7638-1990-8

Монография посвящена интегральным представлениям для голоморфных функций многих комплексных переменных: Бохнера-Мартинелли, Коши-Фантаппье, Коппельмана и др. Приведены приложения данных представлений к аналитическому продолжению функций, формуле Лефшеца, сингулярным интегральным операторам, $\bar{\partial}$ -проблеме Неймана, устранению особенностей CR -функций, дзета-функции систем нелинейных уравнений и др.

Предназначена для специалистов по многомерному комплексному анализу, аспирантов и студентов.

The monograph is devoted to integral representations of holomorphic functions in several complex variables: Bochner-Martinelli, Cauchy-Fantappie, Koppelman etc. It is considered the applications of given representations to analytic continuations of functions, Lefschetz formula, singular integral operators, $\bar{\partial}$ Neumann problem, removal of singularities of CR functions, zeta-function of non-linear system of equations etc.

It intends for specialists in multidimensional complex analysis and postgraduate students.

УДК 517.55
ББК 22.161.5

© Сибирский
федеральный
университет, 2010

ISBN 978-5-7638-1990-8

Предисловие

Интегральное представление Бохнера-Мартинелли для голоморфных функций многих комплексных переменных появилось в работах Мартинелли (1938) и Бохнера (1943). Оно было первым по существу многомерным представлением, в котором интегрирование велось по всей границе области. Это интегральное представление обладает универсальным ядром (не зависящим от вида области), так же как ядро Коши в \mathbb{C}^1 . Но в пространстве \mathbb{C}^n при $n > 1$ ядро Бохнера-Мартинелли является гармонической, а не голоморфной функцией. Данное обстоятельство долгое время препятствовало широкому применению интеграла Бохнера-Мартинелли в многомерном комплексном анализе.

Интерес к представлению Бохнера-Мартинелли возрос в 1970-е гг., что было связано с повышением внимания к интегральным методам в многомерном комплексном анализе. Кроме того, оказалось, что весьма общее интегральное представление Коши-Фантаппье, найденное Лере, легко получается из представления Бохнера-Мартинелли. В то же время появилось представление Коппельмана для внешних дифференциальных форм, частным случаем которого является представление Бохнера-Мартинелли.

Представления Коши-Фантаппье и Коппельмана нашли серьезное применение в многомерном комплексном анализе при получении удачных интегральных представлений для голоморфных функций, явного решения $\bar{\partial}$ -уравнения, равномерной аппроксимации голоморфных функций на компактах и т. д.

Школа по многомерному комплексному анализу, возникшая в Красноярске в 60-х гг. прошлого века благодаря Л.А.Айзенбергу и А.П.Южакову, развивала теорию интегральных представлений и вычетов и их приложений. В 80-90-х годах прошлого века были изданы монографии, посвященные интегральным представлениям и вычетам (Л.А.Айзенберг, Ш.А.Даутов, А.П.Южаков, А.К.Цих, А.М.Кытманов, Н.Н.Тарханов). С тех пор прошло более 20 лет, появились новые результаты и новые направления деятельности.

В данную монографию вошли результаты авторов, полученные за последние годы. В частности, построены точные комплексы, связанные с комплексом Дольбо; изучены различные семейства комплексных прямых и кривых, достаточных для голоморфного продолжения функций с границы ограниченной области; доказан многомерный аналог известной формулы Лефшеца, вычисляющей полное число Лефшеца для комплекса Дольбо для строго псевдовыпуклой области в терминах локальных инвариантов

неподвижных точек (как внутренних, так и граничных) голоморфного эндоморфизма f ; получены различные условия $\bar{\partial}$ -замкнутости дифференциальных форм, позволяющие находить продолжения CR -форм с границы области; найдены формулы для вычисления степенных сумм корней систем нелинейных (неалгебраических) уравнений, с помощью них получен аналог дзета-функции Римана для таких систем; изучен сингулярный интегральный оператор Бохнера-Мартинелли на гиперповерхностях с особыми точками конического типа; эти результаты применены к изучению C^* -алгебры операторов, порожденных оператором Бохнера-Мартинелли, его сопряженным и операторами умножения на непрерывные функции.

В каком-то смысле данная монография продолжает книгу одного из авторов [37], изданную затем за рубежом [119]. Во всяком случае первые две главы нашей книги почти полностью взяты из [37].

Результаты монографии излагались в спецкурсах Института математики Сибирского федерального университета в 1995–2010 гг.

Нумерация глав и параграфов сквозная. Все утверждения, замечания, формулы и примеры привязаны к номеру параграфа.

Монография подготовлена при частичной финансовой поддержке гранта Президента РФ НШ-7347.2010.1; гранта РФФИ, №08-01-00844 и гранта АВЦП, №2.1.1/4620.

Оглавление

Предисловие	3
Глава 1. Многомерные интегральные представления	5
1. Интегральное представление Бохнера-Грина	5
2. Интегральное представление Бохнера-Мартинелли	9
3. Интегральное представление Коши-Фанташье	12
3.1. Интегральное представление Лере (Коши-Фанташье)	12
3.2. Интегральное представление Хенкина-Рамиреза	14
3.3. Интегральное представление Коши-Сеге (Хуа Локена)	17
3.4. Интегральное представление Ярмухамедова	18
3.5. Интегральное представление Андреотти-Норге	20
4. Интегральная формула Грина	21
Глава 2. Граничные свойства интеграла Бохнера-Мартинелли	28
5. Граничное поведение интеграла Бохнера-Мартинелли	28
5.1. Формулы Сохоцкого-Племеля	28
5.2. Аналог теоремы Привалова	34
6. Теоремы о скачке интеграла Бохнера-Мартинелли	37
6.1. Теорема о скачке для интегрируемых и непрерывных функций	37
6.2. Теорема о скачке для функций класса \mathcal{L}^p	41
7. Теоремы о скачке производных интеграла Бохнера-Мартинелли	44
7.1. Формулы для производных интеграла Бохнера-Мартинелли	44
7.2. Теоремы о скачке производных	47
7.3. Теорема о скачке $\bar{\partial}$ -нормальной производной	49
8. Оператор Ходжа	55
9. Голоморфность функций, представимых интегралом Бохнера-Мартинелли	57
9.1. Постановка $\bar{\partial}$ -задачи Неймана	57
9.2. Однородная $\bar{\partial}$ -задача Неймана	59
9.3. Теоремы о голоморфности функций, представимых интегралом Бохнера-Мартинелли	60
9.4. Разложения ядра Бохнера-Мартинелли по однородным гармоническим многочленам	61

Глава 3. Оператор Бохнера-Мартинелли в шаре и полупространстве	65
10. Интеграл Бохнера-Мартинелли в шаре	65
10.1. Собственные функции оператора Бохнера-Мартинелли в шаре	65
10.2. Спектр оператора Бохнера-Мартинелли в шаре	68
10.3. Вычисление интеграла Бохнера-Мартинелли в шаре	69
11. Интеграл Бохнера-Мартинелли в полупространстве	71
11.1. Вычисление интеграла Бохнера-Мартинелли в полупространстве	71
11.2. Собственные функции оператора Бохнера-Мартинелли в полупространстве	75
12. Итерации интегрального оператора Бохнера-Мартинелли в шаре для бесконечно дифференцируемых функций	78
13. Итерации интегрального оператора Бохнера-Мартинелли в шаре для распределений	82
14. Итерации интегрального оператора Бохнера-Мартинелли в шаре для аналитических функционалов	84
15. Спектр оператора Бохнера-Мартинелли в \mathcal{L}^p	87
Глава 4. Формула Бохнера-Мартинелли-Коппельмана и ее модификации	90
16. Интегральное представление Бохнера-Мартинелли-Коппельмана	90
17. Теорема о скачке интеграла Бохнера-Мартинелли-Коппельмана	94
17.1. Теорема о скачке	94
17.2. Однородная $\bar{\partial}$ -задача Неймана для дифференциальных форм	98
18. Теорема о замкнутости интеграла $M\gamma$	99
19. Модификации формулы Бохнера-Мартинелли-Коппельмана	103
19.1. Свойства ядра $V_{p,q}$	103
19.2. Некоторая модификация формулы Бохнера-Мартинелли-Коппельмана	106
19.3. Основная модификация формулы Бохнера-Мартинелли-Коппельмана	108
20. Условия $\bar{\partial}$ -замкнутости форм с гармоническими коэффициентами	110
21. Условия $\bar{\partial}$ -замкнутости дифференциальных форм с гладкими коэффициентами	114
Глава 5. Комплекс Дольбо для оператора Коши-Римана	116

22. Формула Бохнера-Мартинелли-Кошпельмана для пространств $\mathcal{W}_q^s(D)$	117
23. Построение точных комплексов	120
23.1. Точный комплекс пространств $\mathcal{V}_q^s(D)$	120
23.2. Точный двойной комплекс	122
24. Описание пространств $\mathcal{V}_0^s(D)$ и $\mathcal{V}_n^s(D)$	125
25. Регулярные области	129
25.1. Условие равенства нулю интеграла $M\gamma$ в области D ...	129
25.2. Интегральное описание пространств $\mathcal{V}_q^s(D)$	130
25.3. Дифференциальное описание пространств $\mathcal{V}_q^s(D)$, $q < n - 1$	132
25.4. Дифференциальное описание пространства $\mathcal{V}_{n-1}^s(D)$...	134
Глава 6. Формула Лефшеца для комплекса Дольбо в строго псевдовыпуклых областях	139
26. Локальные ядра	140
27. Вспомогательный комплекс Дольбо	142
28. Построение глобальных интегральных операторов	144
29. Параметрикс вспомогательного комплекса	146
30. Вспомогательные формулы для числа Лефшеца	148
31. Регуляризация следа оператора f^* на нулевой группе когомологий	149
32. Полное число Лефшеца	151
33. Основная формула для числа Лефшеца	154
34. Голоморфная формула Лефшеца	156
35. Случай простых неподвижных точек	157
35.1. Нахождение индексов внутренних неподвижных точек .	157
35.2. Нахождение индексов граничных неподвижных точек ..	159
35.3. Формула для числа Лефшеца в случае простых неподвижных точек	165
36. Главное значение по Коши особого интеграла Хенкина- Рамиреза в строго псевдовыпуклых областях	166
36.1. Теорема о главном значении по Коши интеграла Хенкина-Рамиреза	168
36.2. Вычисление главного значения для разности ядер Бохнера-Мартинелли и Хенкина-Рамиреза	169
36.3. Формула Сохоцкого-Племеля для интеграла Хенкина- Рамиреза	176
37. Главное значение по Коши особого интеграла Коши-Сеге в шаре	177
37.1. Теорема о главном значении по Коши интеграла Коши-Сеге	177

37.2. Главное значение интеграла Коши-Сеге в смысле Керзмана-Стейна	182
37.3. Главное значение интеграла Бохнера-Мартинелли в шаре в смысле Керзмана-Стейна	184
Глава 7. Многомерные граничные аналоги теоремы Морера	187
38. Функции со свойством Морера вдоль комплексных и действительных плоскостей	188
39. Функции со свойством Морера вдоль комплексных прямых ..	192
40. Граничные теоремы Морера в шаре	197
41. Многомерный логарифмический вычет	203
41.1. Формула многомерного логарифмического вычета	204
41.2. О голоморфности функций, представимых формулой логарифмического вычета	206
42. Голоморфное продолжение вдоль комплексных кривых и аналоги теоремы Морера	213
42.1. Голоморфное продолжение вдоль кривых	213
42.2. Некоторые интегральные критерии голоморфного продолжения функций	218
42.3. Аналоги теоремы Морера	225
43. Теорема Морера в классических областях	227
43.1. Классические области	228
43.2. Теорема Морера в классических областях	229
43.3. Аналог теоремы Гартогса-Бохнера в классических областях	231
44. О достаточности семейства комплексных прямых, пересекающих порождающее многообразие	238
44.1. Пример семейства комплексных прямых, не являющихся достаточным семейством	238
44.2. Достаточные семейства комплексных прямых	240
45. О многомерном аналоге теоремы Морера для вещественно аналитических функций	244
Глава 8. Задача Коши для оператора Коши-Римана	251
46. Задача Коши для уравнения Коши-Римана	251
46.1. Постановка задачи Коши	251
46.2. Единственность задачи Коши	252
46.3. Необходимые условия разрешимости задачи Коши	253
46.4. Достаточные условия разрешимости задачи Коши	254
46.5. Условия разрешимости задачи Коши в шаре	257
47. Базисы с двойной ортогональностью	259
48. Многомерные аналоги формулы Карлемана	264
48.1. Формула Карлемана-Голузина-Крылова	264

48.2. Теорема Тарханова	266
48.3. Формула Айзенберга	268
48.4. Условия разрешимости задачи Коши	270
48.5. Формулы Карлемана, основанные на базисах с двойной ортогональностью	271
49. Задача Коши для комплекса Дольбо	274
49.1. Различные постановки задачи Коши для комплекса Дольбо	274
49.2. Условия разрешимости задачи Коши для комплекса Дольбо	278
49.3. Условия разрешимости задачи Коши в терминах когомологий	281
Глава 9. Аналитическое представление CR-функций на гиперповерхностях с особенностями	284
50. Аналитическое представление CR-функций	284
51. Теорема об аналитическом представлении	288
52. Граничное поведение представляющих функций	295
Глава 10. Особый интегральный оператор Бохнера-Мартинелли	306
53. Определение особого интегрального оператора Бохнера-Мартинелли	307
54. Поведение особого интегрального оператора Бохнера-Мартинелли в весовых пространствах	311
55. Теорема Привалова и теорема о скачке для интеграла Бохнера-Мартинелли	314
56. Конормальный символ для M_S	317
57. Алгебра, порожденная M_S	321
Глава 11. Дзета-функция и нелинейные системы уравнений	326
58. Разделяющие циклы	326
59. Вычетный интеграл	328
60. Инволютивное преобразование	330
61. Степенные суммы для систем полиномов	332
62. Степенные суммы для систем мероморфных функций	333
63. Формулы для нахождения степенных сумм	335
64. Упрощенная система уравнений и суммы кратных рядов ...	338
64.1. Упрощенная система уравнений	338
64.2. Вычисление сумм кратных рядов	345
65. Многомерные аналоги рекуррентных формул Ньютона для систем нелинейных уравнений	349
65.1. Вычисление некоторых интегралов	349
65.2. Аналоги формул Ньютона	354
66. Дзета-функция нелинейных систем	359