

А.Н. ЯКОВЛЕВ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИГНАЛОВ В ПРИМЕРАХ, УПРАЖНЕНИЯХ И ЗАДАНИЯХ

Рекомендовано Сибирским региональным отделением
Учебно-методического объединения высших учебных заведений РФ
по образованию в области радиотехники, электроники,
биомедицинской техники и автоматизации
для межвузовского использования
в качестве учебного пособия для студентов
радиотехнических направлений и специальностей

НОВОСИБИРСК
2012

УДК 621.372(075.8)
Я 474

Рецензенты:

д-р техн. наук, проф. *С.П. Новицкий* (НГТУ);
д-р техн. наук, проф. *В.П. Разинкин* (НГТУ);
д-р техн. наук, проф. *А.К. Дмитриев* (НГТУ);
канд. техн. наук, д-р электротехники *С.Ю. Матвеев*
(директор ООО «НПО-Триада-ТВ»);
канд. техн. наук, проф. *Б.И. Филиппов* (зав. каф. радиотехнических систем
Сибирского гос. ун-та телекоммуникаций и информатики – СибГУТИ);
д-р техн. наук, проф. *В.Г. Патюков* (каф. радиотехники ИИФирЭ ФГАОУ ВПО
«Сибирский федеральный университет»)

Яковлев А.Н.

Я 474 Основы теории сигналов в примерах, упражнениях и заданиях : учеб. пособие / А.Н. Яковлев. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2012. – 472 с.

ISBN 978-5-7782-1995-3

Пособие содержит 16 глав по основополагающим разделам теории сигналов: сигналы и их основные характеристики, динамическое, корреляционное и геометрическое представления сигналов, представление сигналов ортогональными функциями (Радемахера, Уолша, рядами Фурье и Котельникова и др.), спектральное представление периодических и непериодических сигналов (преобразования Фурье и Лапласа), вейвлет-преобразования сигналов, модулированные сигналы и случайные процессы, дискретные сигналы, дискретное и быстрое преобразования Фурье и вейвлет-преобразования последовательностей, кепстральный анализ и др.

В каждой из 16 глав даны краткие теоретические сведения (определения, расчетные формулы и т.п.) в объеме, необходимом для решения приводимых примеров и упражнений. Затем предложены примеры и упражнения (с ответами) для закрепления теоретического материала и выработки навыков творческого мышления, переноса знаний на решение более сложных ситуаций. Книга содержит 132 примера и 252 упражнения (с ответами). Далее почти по каждой теме следует задание, которое может быть составной частью расчетно-графической и/или курсовой работы и содержит от 1 до 3 задач, составленных в 10 вариантах и 10 подвариантах. В качестве средства создания иллюстрационных примеров использованы широко распространенные системы компьютерной математики: Mathcad и MATLAB.

В приложении представлен обширный справочный материал.

Предлагаемое пособие, в котором обобщен многолетний опыт автора, предназначено для практических и самостоятельных занятий, для расчетно-графических заданий, для контроля знаний и умений, а также для занятий в рамках модульно-рейтинговой системы образования и может быть полезно студентам и преподавателям радиотехнических специальностей и лицам, занимающимся самообразованием (или в системе дистанционного обучения).

УДК 621.372(075.8)

ISBN 978-5-7782-1995-3

© Яковлев А.Н., 2012
© Новосибирский государственный
технический университет, 2012

ОГЛАВЛЕНИЕ

Список сокращений	15
Предисловие	17
ВВЕДЕНИЕ	19
В.1. Общие сведения	19
В.2. Классификация сигналов.....	21
В.3. Структурная схема ЦОС	27
<i>Глава 1. СИГНАЛЫ И ИХ ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ</i>	29
1.1. Краткие теоретические сведения	29
1.1.1. Модель сигнала	29
1.1.2. Некоторые физические характеристики	30
1.1.3. Энергетические характеристики сигнала.....	33
1.2. Примеры	35
1. Гармоническое колебание.....	35
2. Единичная функция	36
3. Дельта-функция.....	38
4. Прямоугольный импульс.....	40
5. Сигнум-функция	41
6. Энергия и мощность гармонического колебания за период	41
7. Энергия бигармонического сигнала.....	42
8. Телевизионный сигнал изображения	42
1.3. Упражнения.....	43
1.3.1. Модели сигналов.....	43
1.3.2. Характеристики сигналов.....	45
1.4. Задание. Модель и основные характеристики сигнала	46
<i>Глава 2. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ</i>	49
2.1. Краткие теоретические сведения	49
2.1.1. Представление с помощью функций включения	49
2.1.2. Представление с помощью дельта-функций	51
2.2. Примеры	52
1. Линейно нарастающее напряжение.....	52
2. Прямоугольный импульс.....	53
3. Производная прямоугольного импульса.....	53
4. Сигнал линейного перехода из состояния 0 в состояние U_0	53
5. Нарастающая экспонента	54
6. Фильтрующее действие дельта-функции на экспоненциальный сигнал.....	54

2.3. Упражнения.....	55
2.4. Задание. Динамическое представление импульсного сигнала.....	56
Глава 3. КОРРЕЛЯЦИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ	57
3.1. Краткие теоретические сведения	57
3.1.1. АКФ непериодического сигнала и ее свойства	57
3.1.2. АКФ периодического сигнала и ее свойства	60
3.1.3. ВКФ непериодического сигнала и ее свойства	61
3.1.4. ВКФ периодического сигнала и ее свойства	62
3.2. Примеры	62
1. АКФ прямоугольного импульса	62
2. АКФ пары импульсов	64
3. АКФ гармонического колебания	65
4. АКФ периодической последовательности прямоугольных импульсов	66
5. ВКФ двух прямоугольных импульсов	66
6. ВКФ прямоугольного и несимметричного треугольного импульсов	67
7. ВКФ двух несимметричных треугольных импульсов	69
8. ВКФ двух гармонических колебаний	69
3.3. Упражнения.....	70
3.4. Задание. Корреляционное представление сигналов	72
Глава 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ	73
4.1. Краткие теоретические сведения	73
4.1.1. Пространство сигналов.....	73
4.1.2. Линейное пространство	75
4.1.3. Нормированное пространство.....	75
4.1.4. Метрическое пространство	76
4.1.5. Пространство со скалярным произведением.....	77
4.2. Примеры	79
1. Множество сигналов с ограничением их амплитуды.....	79
2. Энергия и норма косинусоидального импульса.....	79
3. Метрика двух сигналов	80
4. Минимальное расстояние между сигналами.....	81
5. Скалярное произведение двух импульсов	81
4.3. Упражнения.....	82
Глава 5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ.....	85
5.1. Краткие теоретические сведения	85
5.1.1. Обобщенный ряд Фурье	85
5.1.2. Спектральный анализ	86

5.1.3. Синтез сигналов	87
5.1.4. Выбор рациональной системы функций.....	88
5.1.5. Функции Уолша и Радемахера.....	89
5.1.6. Ортогональные системы специальных функций	93
5.2. Примеры	94
5.2.1. Ортогональные функции	94
1. Гармонические базисные функции	94
2. Комплексные экспоненциальные функции	94
3. Формирование ФУ с помощью матриц Адамара.....	95
4. Перемножение ФУ.....	96
5. Формирование ФУ с помощью функций Радемахера	96
5.2.2. Анализ и синтез сигналов в базисе функций Радемахера и Уолша	97
6. Аппроксимация сигнала функциями Радемахера	97
7. Спектр гармонического сигнала в базисе ФУ	99
8. Синтез гармонического сигнала в базисе ФУ	101
5.2.3. Синтез (аппроксимация) сигнала в базисе функций Лагерра	102
9. Аппроксимация импульсного сигнала.....	102
5.3. Упражнения.....	104
5.3.1. Представление сигналов в базисе функций Радемахера	104
5.3.2. Функции Уолша	105
5.3.3. Представление сигналов в базисе функций Уолша	105
5.3.4. Представление сигналов в базисе функций Лежандра и Лагерра	108
5.4. Задание. Представление сигнала в базисе функций Уолша	109
Глава 6. ГАРМОНИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ. РЯД ФУРЬЕ	111
6.1. Краткие теоретические сведения	111
6.1.1. Гармонические базисные функции.....	111
6.1.2. Формы ряда Фурье	113
6.1.3. Распределение мощности в спектре сигнала.....	116
6.1.4. Задачи анализа и синтеза.....	117
6.2. Примеры	118
1. Гармоническое колебание.....	118
2. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов.....	120
3. Меандр и его спектр	122
4. Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов, представленной рядом Фурье в комплексной форме.....	124
5. Синтез периодической последовательности прямоугольных импульсов	124
6. Пилообразный сигнал.....	127

7. Последовательность треугольных импульсов.....	129
6.3. Упражнения.....	130
<i>Глава 7. СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ И ЛАПЛАСА.....</i>	<i>133</i>
7.1. Краткие теоретические сведения	133
7.1.1. Преобразования Фурье	133
7.1.2. Энергетический спектр сигнала и его связь с АКФ.....	137
7.1.3. Определение активной длительности сигнала и ширины его спектра	139
7.1.4. Преобразования Лапласа	141
7.2. Примеры	142
7.2.1. Спектральная плотность интегрируемых сигналов	142
1. Прямоугольный импульс	142
2. Экспоненциальный импульс	144
3. Колокольный (гауссовский) импульс	145
4. Импульс вида $\sin(x)/x$	146
5. Спектр пары импульсов прямоугольной формы.....	148
6. «Пачка» импульсов.....	150
7. Симметричный треугольный импульс.....	151
8. Затухающее гармоническое колебание.....	153
9. Свертка сигналов. Связь с ВКФ	154
7.2.2. Спектральная плотность неинтегрируемых сигналов	157
10. Функция включения (Хевисайда).....	157
11. Дельта-функция (Дирака).....	159
12. Гармоническое колебание.....	159
13. Постоянное напряжение	160
14. Комплексная экспонента.....	160
15. Периодический сигнал	161
7.2.3. Преобразования Лапласа	161
16. Изображение функций Хевисайда и Дирака	161
17. Изображение прямоугольного импульса	162
18. Определение оригинала по изображению	162
7.3. Упражнения.....	163
7.3.1. Спектральный анализ и синтез сигналов	163
7.3.2. Спектр, АКФ и свертка сигналов	167
7.3.3. Преобразования Лапласа	168
7.4. Задание. Спектральный анализ сигналов	169

<i>Глава 8. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ С ОГРАНИЧЕННЫМ СПЕКТРОМ</i>	
РЯДОМ КОТЕЛЬНИКОВА	171
8.1. Краткие теоретические сведения	171
8.1.1. Ряд и теорема Котельникова	171
8.1.2. Базисные функции и их свойства	172
8.1.3. Коэффициенты ряда Котельникова. Спектральный анализ	174
8.1.4. База, энергия и мощность сигнала, ошибка аппроксимации	175
8.1.5. Дискретизация непрерывных сигналов.....	177
8.1.6. Связь между спектрами непрерывных и дискретных сигналов	179
8.1.7. Восстановление непрерывного сигнала.....	181
8.1.8. Теорема отсчетов в частотной области	183
8.2. Примеры	185
1. Гармоническое колебание.....	185
2. Бигармонический сигнал.....	187
3. Прямоугольный видеоимпульс.....	188
4. Экспоненциальный импульс	191
8.3. Упражнения.....	193
8.4. Задание. Представление сигналов рядом Котельникова.....	196
<i>Глава 9. ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ</i>	197
9.1. Краткие теоретические сведения	197
9.1.1. Вейвлеты. Главные признаки.....	197
9.1.2. Примеры материнских вейвлетов.....	200
9.1.3. Непрерывное вейвлет-преобразование	202
9.1.4. Свойства вейвлет-анализа	203
9.1.5. Сопоставление с преобразованием Фурье	205
9.2. Примеры	207
9.2.1. Определение вейвлет-спектра в системе Mathcad	207
1. Гармоническое колебание.....	208
2. Сумма двух гармонических колебаний	209
3. Прямоугольный импульс	212
9.2.2. Вейвлет-анализ в системе MATLAB.....	213
4. Гармоническое колебание.....	214
5. Сумма двух гармонических колебаний	215
6. Бигармонический импульсный сигнал с шумом.....	216
7. Прямоугольный импульс с шумом.....	217
8. Звуковой сигнал	218
9. Доступ к демонстрационным примерам.....	219
10. Треугольный сигнал (демонстрационный).....	220

9.3. Задания	221
9.3.1. Вейвлет-анализ в пакете Mathcad на основе МНАТ-вейвлета.....	221
9.3.2. Вейвлет-представление в пакете MATLAB.....	222
Глава 10. МОДУЛИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ	225
10.1. Краткие теоретические сведения	225
10.1.1. Общие сведения	225
10.1.2. Амплитудно-модулированное колебание (АМК)	227
10.1.3. Сигналы угловой модуляции	231
10.1.4. Узкополосные, комплексные и аналитические сигналы	237
10.2. Примеры	241
10.2.1. Амплитудно-модулированный сигнал (АМС)	241
1. Спектр многокомпонентного АМС.....	241
2. Спектр АМС непериодического (импульсного) сигнала	242
3. Автокорреляционная функция АМК.....	243
4. АКФ импульсного АМС.....	245
10.2.2. Сигнал угловой модуляции (УМС)	246
5. Радиоимпульс с линейной частотной модуляцией	246
6. АКФ ЛЧМ-импульса	247
7. Преобразования Гильберта для гармонических колебаний.....	248
10.3. Упражнения.....	249
10.3.1. Амплитудно-модулированные сигналы.....	249
10.3.2. Сигналы с угловой модуляцией.....	252
10.3.3. ЛЧМ-импульсы	254
10.3.4. Комплексные и аналитические сигналы	255
10.4. Задания	256
10.4.1. Амплитудно-модулированное колебание	256
10.4.2. Последовательность прямоугольных радиоимпульсов	258
10.4.3. Частотно-модулированное колебание.....	259
Глава 11. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ	261
11.1. Краткие теоретические сведения	261
11.1.1. Вероятностное описание СП.....	261
11.1.2. Моментные функции. Стационарные и эргодические процессы	266
11.1.3. Корреляционно-спектральное представление СП	269
11.2. Примеры	274
11.2.1. Параметры и характеристики СП в сечении.....	274
1. Определение вероятности событий.....	274
2. Математическое ожидание и дисперсия экспоненциального распределения.	274

3. Характеристическая функция и энтропия равномерного закона	275
4. Определение моментов СП по кумулянтным функциям	276
5. ПРВ функции случайной величины	277
6. Функциональное преобразование СП	278
11.2.2. Различные СП	279
7. Гармоническое колебание со случайной начальной фазой	279
8. Производная от эргодического СП.	281
9. Узкополосный СП	282
10. Распределение огибающей и фазы суммы гармонического сигнала и узкополосного нормального шума	284
11.3. Упражнения	287
11.3.1. Вероятностные характеристики в сечении	287
11.3.2. Характеристические функции. Энтропия	291
11.3.3. Моментные функции. Стационарные и эргодические процессы	292
11.3.4. Спектральный и корреляционный анализ	294
11.3.5. Узкополосные случайные процессы	294
11.4. Задания	296
11.4.1. Вероятность превышения заданного уровня	296
11.4.2. Закон распределения	297
11.4.3. Моментные функции. Стационарность и эргодичность	299
<i>Глава 12. СЛУЧАЙНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ</i>	301
12.1. Краткие теоретические сведения	301
12.1.1. Общие сведения	301
12.1.2. Оценка числовых характеристик	302
12.1.3. Оценка плотности вероятности	304
12.1.4. Оценка АКФ	305
12.1.5. Оценка СПМ	306
12.1.6. Вычисления в пакете Mathcad	307
12.2. Примеры	307
1. Числовые характеристики последовательности	307
2. То же, но с использованием встроенных функций Mathcad	309
3. Расчет и построение гистограммы	309
4. Вычисление АКФ	312
5. Вычисление СПМ	313
6. АКФ и СПМ коррелированной последовательности	313
7. Корреляционная функция и СПМ двух коррелированных последова- тельств	316

12.3. Задание. Определение основных характеристик случайной последовательности	317
<i>Глава 13. ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ</i>	319
13.1. Краткие теоретические сведения	319
13.1.1. Способы представления дискретных сигналов	319
13.1.2. Преобразования Фурье и Лапласа	322
13.1.3. Z-преобразование	323
13.2. Примеры	329
1. Единичный дискретный скачок	329
2. Экспоненциальная дискретная последовательность	331
3. Косинусоидальная последовательность	332
4. Свертка последовательностей	332
5. Вычисление ОЗП с использованием теоремы Коши	333
6. Определение ОЗП разложением Z-образа в степенной ряд	334
7. Вычисление $x[n]$ с помощью вычетов	334
8. Вычисление ОЗП разложением функции $X(z)$ на простые дроби	335
9. Нахождение последовательности делением числителя ее Z-образа на знаменатель	336
13.3. Упражнения	337
13.3.1. Дискретная последовательность. Преобразования Фурье и Лапласа	337
13.3.2. Прямое Z-преобразование	337
13.3.3. Обратное Z-преобразование	339
<i>Глава 14. ДИСКРЕТНОЕ И БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ</i>	341
14.1. Краткие теоретические сведения	341
14.1.1. Дискретное преобразование Фурье	341
14.1.2. Восстановление аналогового сигнала по ДПФ	345
14.1.3. Быстрое преобразование Фурье	346
14.1.4. Вычисление БПФ в пакете Mathcad	349
14.1.5. MATLAB для вычислений БПФ	349
14.2. Примеры	350
14.2.1. Вычисление ДПФ	350
1. Экспоненциальная дискретная последовательность	350
2. Вычисление коэффициентов ДПФ	352
3. Выполнение обратного ДПФ	353
14.2.2. Вычисление БПФ в пакете Mathcad	353
4. Прямое и обратное БПФ для векторов	353
5. Синусоида как вектор	354

6. Сумма трех синусоидальных составляющих	355
7. Разложение и последующий синтез прямоугольного импульса	356
14.2.3. Вычисление БПФ в пакете MATLAB	357
8. Прямое и обратное БПФ для векторов.....	357
9. Сумма трех синусоид.....	358
10. АМК на фоне шума.....	358
11. Прямоугольный импульс. Добавление нулей к набору отсчетов.....	360
14.3. Упражнения.....	362
14.3.1. Вычисления ДПФ	362
14.3.2. Вычисления БПФ	363
14.4. Задание. Дискретные сигналы. Прямое и обратное БПФ	364
<i>Глава 15. ДИСКРЕТНОЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ</i>	<i>367</i>
15.1. Краткие теоретические сведения	367
15.1.1. Диадное вейвлет-преобразование.....	367
15.1.2. Дискретное вейвлет-преобразование (ДВП)	369
15.2. Примеры	370
15.2.1. ДВП в пакете Mathcad	370
1. Прямоугольный импульс с шумом.....	370
2. Вейвлет-фильтрация бигармонического импульсного сигнала с шумом.....	375
15.2.2. ДВП в пакете MATLAB.....	377
3. Бигармонический импульсный сигнал с шумом.....	377
4. Звуковой сигнал	379
<i>Глава 16. КЕПСТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ.....</i>	<i>381</i>
16.1. Краткие теоретические сведения	381
16.1.1. Комплексный кепстр.....	381
16.1.2. Кепстр мощности (энергетический кепстр).....	383
16.1.3. Кепстральный анализ.....	384
16.2. Примеры	384
1. Кепстр дельта-импульса.....	384
2. Кепстр дискретного прямоугольного импульса.....	384
3. Комплексный кепстр АМК	386
4. Комплексный кепстр свертки двух сигналов	386
5. «Развертка» свернутых сигналов.....	387
6. Анализ речевого сигнала [1].	388
7. Определение задержки сигналов.....	389
8. Влияние шума	391
9. Статистические свойства кепстра	393

16.3. Упражнения.....	395
16.3.1. Комплексный кепстр.....	395
16.3.2. Кепстр мощности. Кепстральный анализ	396
ОТВЕТЫ	397
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	434
П.1. Некоторые тригонометрические формулы.....	434
П.2. Производные элементарных функций.....	435
П.3. Некоторые интегралы.....	436
П.4. Некоторые специальные полиномы и функции, используемые для пред- ставления сигналов обобщенным рядом Фурье.....	440
П.5. Основные теоремы о спектрах	444
П.6. Об активной длительности и ширине спектра импульсного сигнала.....	444
П.7. Связь между изображением по Лапласу и оригиналом	446
П.8. Изображение и спектральная плотность некоторых сигналов	448
П.9. Функции Бесселя	453
П.10. Законы распределения.....	455
П.11. Функции формирования и обработки случайных последовательностей в пакете Mathcad [7, 30, 31].....	464
П.12. Команды и функции пакета WAVELET TOOLBOX MATLAB	466
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	469