

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Х30

Электронные версии книг
на сайте www.prospekt.org

Лобкова Н. И., Максимов Ю. Д., Хватов Ю. А.

Х30 Высшая математика. Том 2 : учебное пособие / отв. ред. В. И. Антонов, Ю. Д. Максимов. — Москва : Проспект, 2015. — 472 с.

ISBN 978-5-392-13489-2

Пособие является вторым томом учебного пособия по всем разделам курса математики для бакалавров технических и экономических направлений, соответствует государственному образовательному стандарту и действующим программам. Книга может быть использована студентами и преподавателями дневных, вечерних и заочных отделений вузов и технических университетов.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

*Печатается по решению редакционно-издательского совета
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*

Учебное издание

**Лобкова Наталья Ивановна,
Максимов Юрий Дмитриевич,
Хватов Юрий Алексеевич**

**ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ТОМ 2**

Учебное пособие

Оригинал-макет подготовлен компанией ООО «Оригинал-макет»
www.o-maket.ru; тел.: (495) 726-18-84

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.004173.04.09 от 17.04.2009 г.

Подписано в печать 20.08.2014. Формат 60×90 $\frac{1}{16}$.
Печать цифровая. Печ. л. 29,5. Тираж 100 экз. Заказ №

ООО «Проспект»
111020, г. Москва, ул. Боровая, д. 7, стр. 4.

ISBN 978-5-392-13489-2

© Коллектив авторов, 2014
© ООО «Проспект», 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 9. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ3

Глава 1. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Общие понятия4

- § 1. Дифференциальные уравнения. Основные понятия4
- § 2. Геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Метод изоклин5
- § 3. Задача и теорема Коши для уравнения $y'=f(x, y)$.
Общее, частное и особое решения7

Глава 2. Дифференциальные уравнения первого порядка,

интегрируемые в квадратурах11

- § 1. Уравнения в полных дифференциалах11
- § 2. Уравнения с разделяющимися переменными14
- § 3. Однородные уравнения15
- § 4. Линейные уравнения17
- § 5. Уравнение Бернулли18

Глава 3. Дифференциальные уравнения высших порядков.20

- § 1. Задача и теорема Коши для дифференциального уравнения n -го порядка, разрешенного относительно старшей производной. Общее и частное решение.20
- § 2. Уравнение n -го порядка, не содержащее искомой функции и ее нескольких последовательных производных23
- § 3. Уравнение n -го порядка, не содержащее независимой переменной24
- § 4. Уравнения n -го порядка, однородные относительно искомой функции и ее производных26

Глава 4. Линейные дифференциальные уравнения высших

порядков29

- § 1. Основные понятия29
- § 2. Линейный дифференциальный оператор и его свойства. Свойства решений линейного однородного дифференциального уравнения30
- § 3. Линейно зависимые и линейно независимые функции. Условия линейной зависимости и линейной независимости системы решений уравнения $L[y] = 0$ на промежутке (a, b) 31

§ 4. Фундаментальная система решений и теорема о структуре общего решения уравнения $L_n[y] = 0$	35
§ 5. Структура общего решения уравнения $L[y] = q(x)$. Принцип суперпозиции	37
§ 6. Метод вариации произвольных постоянных для линейного неоднородного дифференциального уравнения ...	39
§ 7. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	42
§ 8. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и специальным видом правой части	48
§ 9. Понятие о краевой задаче для линейного дифференциального уравнения второго порядка	55

Глава 5. Системы дифференциальных уравнений

§ 1. Основные понятия. Канонические и нормальные системы. Механический смысл нормальной системы ...	57
§ 2. Задача Коши и теорема Коши для нормальной системы. Общее решение системы	60
§ 3. Метод интегрируемых комбинаций. Первые интегралы. Общий интеграл системы	62
§ 4. Интегрирование системы дифференциальных уравнений путем исключения неизвестных функций	64
§ 5. Системы линейных дифференциальных уравнений	67
§ 6. Примеры решения систем дифференциальных уравнений из простейших задач электротехники	68
Контрольные вопросы и задачи к разделу 9	74
Ответы на контрольные вопросы и задачи к разделу 9	76

Раздел 10. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ ..

Глава 1. Числовые ряды. Основные понятия и свойства

§ 1. Числовой ряд, его сходимость, сумма	79
§ 2. Необходимое условие сходимости ряда	80
§ 3. Основные свойства сходящихся рядов	81

Глава 2. Сходимость числовых рядов с неотрицательными членами

§ 1. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда с неотрицательными членами	84
§ 2. Признаки сравнения для рядов с неотрицательными членами	84
§ 3. Интегральный признак Коши	87
§ 4. Признак Даламбера и радикальный признак Коши	88

Глава 3. Сходимость знакопеременных рядов	91
§ 1. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница	91
§ 2. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость	93
*§ 3. Признаки сходимости Дирихле и Абеля	95
Глава 4. Функциональные ряды. Степенные ряды	96
§ 1. Понятие функционального ряда, его области сходимости	96
§ 2. Мажорируемые функциональные ряды и их свойства	97
§ 3. Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал сходимости	98
§ 4. Свойства степенных рядов на интервале сходимости	103
§ 5. Разложение функции в степенной ряд. Ряд Тейлора	105
§ 6. Разложение некоторых элементарных функций в ряды Маклорена	107
§ 7. Приложения степенных рядов	111
*§ 8. Степенные ряды с комплексными членами	113
Контрольные вопросы и задачи к разделу 10	115
Ответы на контрольные вопросы и задачи к разделу 10	117
Раздел 11. РЯДЫ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ	118
Глава 1. Тригонометрические ряды Фурье	119
§ 1. Периодические функции и их свойства	119
§ 2. Ортогональность тригонометрической системы функций	120
§ 3. Ряд Фурье 2π -периодической функции	121
§ 4. Разложение в ряд Фурье функции, заданной на промежутке длины 2π	123
§ 5. Теорема о разложимости функций в ряд Фурье	123
§ 6. Ряды Фурье для четных и нечетных функций	125
§ 7. Разложение в ряд Фурье функции, заданной на промежутке $[0, \pi]$, по косинусам и синусам	128
§ 8. Разложение в ряд Фурье функции произвольного периода	131
§ 9. Комплексная форма тригонометрических рядов Фурье	133
*Глава 2. Интеграл и преобразование Фурье	136
§ 1. Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье	136
§ 2. Теорема о представлении функций интегралом Фурье	137
§ 3. Комплексная форма интеграла Фурье	138
§ 4. Преобразование Фурье. Примеры	139
Контрольные вопросы и задачи к разделу 11	141
Ответы на контрольные вопросы и задачи к разделу 11	142

Раздел 12. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ...144

Глава 1. Криволинейные интегралы.....145

- § 1. Естественная параметризация гладкой кривой.....145
- § 2. Понятие и вычисление криволинейного интеграла
1-го рода147
- § 3. Механический и физический смысл криволинейного
интеграла 1-го рода. Приложения к механике и физике...150
- § 4. Криволинейный интеграл 2-го рода154

Глава 2. Двойной интеграл.....159

- § 1. Определение двойного интеграла159
- § 2. Геометрический и механический смысл двойного
интеграла.....160
- § 3. Свойства двойных интегралов162
- § 4. Вычисление двойного интеграла в прямоугольных
координатах163
- § 5. Формула Грина166
- § 6. Замена переменных в двойном интеграле.
Вычисление двойного интеграла в криволинейных
координатах169
- § 7. Геометрические приложения двойного интеграла.....175
- § 8. Механические и физические приложения двойного
интеграла.....181
- § 9. Условия независимости криволинейного интеграла
2-го рода по плоской кривой от пути интегрирования ..183
- § 10. Восстановление функции двух переменных по ее
полному дифференциалу. Интегрирование полных
дифференциалов187

Глава 3. Тройной интеграл.....190

- § 1. Понятие и механическая интерпретация тройного
интеграла.....190
- § 2. Свойства тройных интегралов191
- § 3. Вычисление тройного интеграла
в прямоугольной декартовой системе координат.....192
- § 4. Вычисление тройного интеграла в криволинейных
координатах195
- § 5. Приложения тройного интеграла к механике и физике...201
- § 6. Понятие об n -кратном интеграле.....204

Глава 4. Поверхностные интегралы.....206

- § 1. Понятие и вычисление поверхностного интеграла
1-го рода206

§ 2. Приложения поверхностного интеграла 1-го рода к механике и физике	208
§ 3. Понятие и вычисление криволинейного интеграла 2-го рода	209
§ 4. Формула Стокса. Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода по пространственной кривой от пути интегрирования. .	213
§ 5. Формула Остроградского — Гаусса	218
Контрольные вопросы и задачи к разделу 12	222
Ответы на контрольные вопросы и задачи к разделу 12	225
Раздел 13. ТЕОРИЯ ПОЛЯ	227
Глава 1. Скалярное поле	228
§ 1. Скалярное поле. Линии и поверхности уровня. Производная по направлению	228
§ 2. Градиент скалярного поля	231
Глава 2. Векторное поле	235
§ 1. Векторное поле. Векторные линии	235
§ 2. Поток векторного поля через поверхность	236
§ 3. Дивергенция векторного поля	241
§ 4. Циркуляция векторного поля. Плоскостная плотность циркуляции	245
§ 5. Ротор векторного поля	247
§ 6. Оператор Гамильтона	251
§ 7. Геометрические, дифференциальные и интегральные характеристики полей	253
§ 8. Дифференциальные операции второго порядка. Оператор Лапласа	253
§ 9. Классификация векторных полей. Потенциальное, соленоидальное, лапласово поля и их свойства	255
Контрольные вопросы и задачи к разделу 13	261
Ответы на контрольные вопросы и задачи к разделу 13	262
Раздел 14. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	263
Глава 1. Алгебра событий	264
§ 1. Предмет теории вероятностей	264
§ 2. Классификация событий	265
§ 3. Действия над событиями	266

Глава 2. Вероятность события	270
§ 1. Относительная частота события и ее свойства	270
§ 2. Статистическое определение вероятности	271
§ 3. Аксиоматическое определение вероятности	272
§ 4. Классическое определение вероятности	273
§ 5. Геометрическое определение вероятности	275
§ 6. Субъективное определение вероятности	276
Глава 3. Комбинаторика	277
§ 1. Комбинаторный принцип умножения	277
§ 2. Размещения	278
§ 3. Перестановки	279
§ 4. Сочетания	279
§ 5. Размещения с повторениями	281
Глава 4. Алгебра вероятностей	283
§ 1. Условная вероятность	283
§ 2. Правило умножения вероятностей	284
§ 3. Независимость событий. Правило умножения вероятностей взаимно независимых событий	285
§ 4. Правила сложения вероятностей	287
§ 5. Формулы полной вероятности и Байеса	289
§ 6. Схема проведения независимых испытаний Бернулли. Биномиальная вероятность	290
§ 7. Приближенная формула Пуассона для вычисления биномиальной вероятности	292
Глава 5. Одномерная случайная величина	294
§ 1. Определение случайной величины	294
§ 2. Дискретная случайная величина	295
§ 3. Числовые характеристики дискретной случайной величины	297
§ 4. Производящая функция (вероятностей)	302
§ 5. Биномиальное, Пуассона, геометрическое распределения	303
§ 6. Непрерывная случайная величина	305
§ 7. Числовые характеристики непрерывной случайной величины	307
§ 8. Нормальное, показательное, равномерное распределения	310
Глава 6. Двумерная случайная величина	318
§ 1. Двумерная случайная величина, ее функция распределения	318

§ 2. Дискретная двумерная случайная величина, ее таблица распределения	319
§ 3. Непрерывная двумерная случайная величина. Плотность вероятности	322
§ 4. Примеры двумерных непрерывных распределений	323
§ 5. Зависимость и независимость двух случайных величин	325
§ 6. Математическое ожидание функции двумерной случайной величины	327
§ 7. Корреляционный момент и коэффициент корреляции	330
Глава 7. n-мерная случайная величина	335
§ 1. Основные определения	335
§ 2. Числовые характеристики n -мерной случайной величины	336
§ 3. Полиномиальное и n -мерное нормальное распределения	337
Глава 8. Предельные теоремы	339
§ 1. Неравенства Маркова и Чебышева	339
§ 2. Теоремы Чебышева и Бернулли. Сходимость по вероятности	340
§ 3. Центральная предельная теорема для случая одинаково распределенных слагаемых	342
*Глава 9. Дополнение (о центральной предельной теореме)	346
§ 1. История и сущность центральной предельной теоремы	346
§ 2. Комплексные случайные величины	346
§ 3. Характеристические функции	348
§ 4. Доказательство центральной предельной теоремы для случая одинаково распределенных слагаемых	351
Контрольные вопросы и задачи к разделу 14	353
Ответы на контрольные вопросы и задачи к разделу 14	355
РАЗДЕЛ 15. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА	357
Введение	357
1°. Предмет математической статистики	357
2°. Краткие исторические сведения	358
Глава 1. Описательная статистика	360
§ 1. Генеральная совокупность. Выборка. Выбор	360
§ 2. Вариационный и статистический ряды	365
§ 3. Выборочная функция распределения	367
§ 4. Выборочные числовые характеристики	369
§ 5. Группированный статистический ряд. Гистограмма	373

Глава 2. Точечное оценивание числовых характеристик и параметров распределения генеральной совокупности . . . 379

- § 1. Понятие точечной статистической оценки.
Требования к оценкам 379
- § 2. Свойства выборочного среднего и выборочной дисперсии 382
- § 3. Свойства оценок для m и σ в случае нормального распределения 384
- § 4. Метод моментов получения оценок параметров генерального распределения 386
- § 5. Метод максимального правдоподобия получения оценок параметров генерального распределения 387

Глава 3. Интервальное оценивание числовых характеристик и параметров распределения генеральной совокупности 391

- § 1. Доверительный интервал. Точность и надежность оценки 391
- § 2. Точность и надежность оценивания вероятности события с помощью его относительной частоты при большом объеме выборки 392
- § 3. Доверительный интервал для математического ожидания m нормальной генеральной совокупности . . . 394
- *§ 4. Доверительный интервал для среднего квадратичного отклонения σ нормальной генеральной совокупности . . 395
- § 5. Доверительный интервал для математического ожидания m любой генеральной совокупности при большом объеме выборки 397
- *§ 6. Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения σ любой генеральной совокупности при большом объеме выборки 398

Глава 4. Проверка статистических гипотез 401

- § 1. Виды статистических гипотез 401
- § 2. Критерий значимости. Общая схема проверки статистических гипотез 402
- § 3. Ошибки первого и второго рода.
Односторонний и двусторонний критерии 404
- § 4. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий двух нормальных генеральных совокупностей 406
- § 5. Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий двух генеральных совокупностей 409

§ 6. Проверка гипотезы о равенстве вероятностей двух событий с помощью доверительного интервала при больших объемах выборок.....	413
§ 7. Проверка гипотезы о законе распределения генеральной совокупности	414
Глава 5. Корреляционный и регрессионный анализ	421
§ 1. Корреляционный анализ	421
§ 2. Общие сведения о регрессионном анализе	424
§ 3. Метод наименьших квадратов	426
§ 4. Статистический анализ эмпирической простой линейной регрессии	428
Контрольные вопросы и задачи к разделу 15.....	439
Ответы на контрольные вопросы и задачи к разделу 15	442
ЛИТЕРАТУРА.....	444
ПРИЛОЖЕНИЕ I. СПРАВОЧНИК ПО ОДНОМЕРНЫМ НЕПРЕРЫВНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ	446
§ 1. Распределения с плотностью, отличной от нуля на всей оси	446
§ 2. Распределения с плотностью, отличной от нуля на полуоси.....	448
§ 3. Распределения, отличные от нуля на конечном промежутке	451
ПРИЛОЖЕНИЕ II. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ.....	453
Таблица I. Значения нормированной функции Лапласа	453
Таблица II. Квантили u_p нормального распределения $N(0,1)$	454
Таблица III. Квантили $t_p(k)$ распределения Стьюдента $T(k)$	454
Таблица IV. Квантили $\chi_p^2(k)$ распределения хи-квадрат $\chi^2(k)$	455
Таблица V. Квантили $F_p(k_1, k_2)$ распределения Фишера $F(k_1, k_2)$	455
Таблица VI. Равномерно распределенные случайные числа	456
Таблица VII. Нормирующие коэффициенты для устранения смещения оценок среднего квадратичного отклонения σ в случае нормального распределения [4]	457