

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
**«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**  
(ФГБОУ ВО ВГУ)

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ**

по курсам: **«Математический анализ»**  
**«Многомерный математический анализ»**

для студентов 1 курса экономического факультета по направлениям  
«Экономика» и «Экономическая безопасность»

Воронеж 2015

## СОДЕРЖАНИЕ

Тема 1. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.....	6
1.1. Функции. Предел и непрерывность функции .....	6
ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ.....	10
1.2. Производная функции. Приложения дифференциального исчисления.....	16
ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ.....	24
1.3. Интегральное исчисление и его приложения.....	35
ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ.....	38
ТЕМА 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.....	48
ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ.....	52
ТЕМА 3. РЯДЫ.....	56
ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ.....	61
ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ (1 семестр).....	67
ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ (2 семестр).....	69
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	73
ЛИТЕРАТУРА.....	75

#### Пример 4.

Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}}$

#### Решение:

В данном примере имеем неопределенность вида  $\frac{\infty}{\infty}$ . В подобных примерах, для раскрытия неопределенности числитель и знаменатель необходимо делить на степень  $x$  с наивысшим показателем, а затем перейти к пределу, применяя теоремы о пределах

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + 3\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} + 5\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt{x}}}{\sqrt{3 - \frac{2}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + 3\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} + 5\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt{x}}}{\sqrt{3 - \frac{2}{x}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + 3\frac{1}{x^{\frac{1}{6}}} + 5\frac{1}{x^{\frac{3}{10}}}}{\sqrt{3 - \frac{2}{x}}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{6}}} + 5 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{10}}}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3 - \frac{2}{x}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ .

#### Пример 5.

Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$

#### Решение:

Преобразуем разность синусов и используем формулу  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (первый замечательный предел) и свойства пределов.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \\ &= \cos \frac{2a}{2} \cdot 1 = \cos a \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\cos a$ .

**Пример 6.**

Вычислить предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{n+2} \right)^{2n+1}$

**Решение:**

В этом примере предел основания равен 1 (следует разделить числитель на знаменатель), а показатель степени стремится к бесконечности. Имеем неопределенность вида  $1^\infty$ . Используем второй замечательный предел-

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \approx 2,71828....$  Сделав очевидные преоб-

зования, получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{n+2} \right)^{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \left( \frac{n-1}{n+2} - 1 \right) \right]^{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{-3}{n+2} \right)^{\frac{n+2}{-3}} \right]^{\frac{-3}{n+2}(2n+1)} = \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3(2n+1)}{n+2}} = e^{-3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+2}} = e^{-6} \end{aligned}$$

**Ответ:**  $e^{-6}$ .

Весьма полезными при нахождении пределов функций является знание следующих пределов

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0) \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad (4)$$

**Пример 7.**

Вычислить предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} n[\ln(n+3) - \ln n]$ .

**Решение:**

Заменяя разность логарифмов логарифмом дроби, и, используя формулу (1), получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n [\ln(n+3) - \ln n] = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln \frac{n+3}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln \left( 1 + \frac{3}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \ln \left( 1 + \frac{3}{n} \right)}{\frac{3}{n}} = 3.$$

**Ответ:** 3.

**ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ**

а) Найти область определения функции.

б) Вычислить следующие пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

1. а). $y = \arcsin(2-x) + \ln x$	б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n - 2}{10^{n+1} + 5}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+x}{2+x} \right)^x$
2. а). $y = \lg(3^x - 3^{-x})$	б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$	$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{1-x^2} \right)$ $\lim_{x \rightarrow 2} (2-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{x}$
3. а). $y = \sqrt{2+x-x^2}$	б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 6x + 8}{x - 4}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x+4}}{x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^3 - 1}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n - \ln(n-3))n$
4. а). $y = \sqrt{16-x^2} + \sqrt[3]{2x+3}$	б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + 7 \cdot 2^n}{2^{n+2} + 5}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3 - \sqrt{2x+9}}$

	$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-10}{n+3} \right)^{2n-1}$
5. a). $y = \lg \sin x$	б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 6x + 4}$ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x + \sqrt{x+2}}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 10x} - x)$ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n-1}{2n+2} \right)^{n-3}$
6. a). $y = \arccos(2 \sin x)$	б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{1 - x}$ $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}$	$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^2 - m - 1}{\sqrt{m^4 + 2} + 5m^2}$ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sin(x+1)}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x)}{x}$
7. a). $y = \lg(x-2) + \arccos \frac{x}{3}$	б) $\lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}} \frac{2x^2 - 9x + 10}{2x - 5}$ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{3 - x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - 2x)x}{x^3 + 1};$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}}$ $\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{2t-4}{2t+1} \right)^{t+1}$
8. a). $y = \sqrt{\sin x}$	б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{2 - x}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 3x} - 2x)$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\sqrt{x} - 1};$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-1}{3x+1} \right)^{x-2}$
9. a). $y = \frac{x-1}{x^2 - 5x - 6}$	б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{2x^2 - 1})$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{\sin(x-a)}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+1} \right)^{\frac{x}{2}}$

10. a). $y = \sqrt{1+x} - 2\sqrt[4]{3-x}$	б) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2x^2 + 1}}{x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+3} \right)^{2x}$
11. a). $y = \arcsin(\operatorname{tg} x)$	б) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{5}} \frac{15x^2 - 2x - 1}{x + \frac{1}{5}}$ $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x+1}}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x+3} - x \right)$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{x^2}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-5}{2x+2} \right)^{x-1}$
12. a). $y = \sqrt{2x-x^3}$	б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{x^3-27}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - 1}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} 2x - 2 \sin^{-1} x)$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x-a}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+5}{3x+7} \right)^{4x}$
13. a). $y = \sqrt{(9-x^2)(x^2-4)}$	б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 1}{x-3}$ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x + \sqrt{x+2}}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 5^x - 3}{9 \cdot 5^{x1} + 4}$ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\frac{\pi}{2} - x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{3x}}$
14. a). $y = \frac{x-8}{x^2-7x+12}$	б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n + \sqrt{3n^3+1}}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{2x^2}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x-6}{5x+2} \right)^{\frac{x}{2}}$
15. a). $y = \lg \cos x$	б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+3x-1}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^{n+2} + 1}{3 - 7^n}$