

УДК 519.63+536.2

ББК 22.317

С12

Издание доступно в электронном виде по адресу  
ebooks.bmstu.press/catalog/93/book1887.html

Факультет «Фундаментальные науки»  
Кафедра «Прикладная математика»

*Рекомендовано Научно-методическим советом  
МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебного пособия*

*Рецензенты:*

д-р техн. наук, профессор *Н.Д. Чайнов*;  
д-р физ.-мат. наук, профессор *М.П. Галанин*

**Савельева, И. Ю.**

С12 Математическое моделирование процессов теплопроводности методом конечных элементов : учебное пособие / И. Ю. Савельева, И. В. Станкевич. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018. — 176, [2] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-4932-3

Приведены формулировки стационарных и нестационарных задач теплопроводности. Рассмотрены основные особенности построения численного решения этих задач в рамках конечно-элементной технологии.

Для студентов 3-го и 4-го курсов факультета «Фундаментальные науки» МГТУ им. Н.Э. Баумана, изучающих дисциплины «Уравнения математической физики», «Методы вычислений», «Математическое моделирование», «Прикладные пакеты инженерного анализа», «Математические модели механики сплошной среды» и выполняющих соответствующие курсовые работы. Может быть полезно студентам старших курсов других факультетов, изучающим численные методы решения краевых и начально-краевых задач.

УДК 519.63+536.2  
ББК 22.317

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018  
© Оформление. Издательство  
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018

ISBN 978-5-7038-4932-3

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	3
Основные обозначения .....	5
Введение .....	7
<b>1. Математические формулировки задач теплопроводности .....</b>	<b>10</b>
1.1. Постановка нелинейной стационарной задачи теплопроводности .....	10
1.2. Вариационная формулировка стационарной задачи теплопроводности .....	12
1.3. Постановка нелинейной нестационарной задачи теплопроводности .....	15
<i>Вопросы и задания .....</i>	<i>17</i>
<b>2. Типы конечных элементов и их функции формы .....</b>	<b>18</b>
2.1. Понятие конечного элемента .....	18
2.2. Интерполяционные полиномы и функции формы .....	22
2.3. Одномерные конечные элементы .....	33
2.3.1. Линейные конечные элементы .....	33
2.3.2. Квадратичные конечные элементы .....	37
2.3.3. Кубические конечные элементы .....	40
2.4. Двумерные конечные элементы .....	42
2.4.1. Треугольные конечные элементы .....	42
2.4.2. Четырехугольные конечные элементы .....	51
2.5. Трехмерные конечные элементы .....	60
2.5.1. Конечные элементы на основе тетраэдра .....	60
2.5.2. Конечные элементы на основе треугольной призмы .....	68
2.5.3. Шестигранные конечные элементы сирендипова семейства .....	75
2.5.4. Шестигранные конечные элементы лагранжева семейства .....	80
2.5.5. Переходные конечные элементы .....	82
2.6. Конечные элементы эрмита семейства .....	83
<i>Вопросы и задания .....</i>	<i>94</i>
<b>3. Построение матричных соотношений метода конечных элементов .....</b>	<b>95</b>
3.1. Стационарная задача теплопроводности .....	95
3.2. Нестационарная задача теплопроводности .....	100
3.3. Построение изопараметрических отображений .....	103
3.4. Особенности численного интегрирования матричных соотношений метода конечных элементов .....	106
3.4.1. Расположение локальных координат гауссовых точек .....	106

3.4.2. Интегрирование по объему .....	107
3.4.3. Интегрирование по поверхности .....	113
<i>Вопросы и задания</i> .....	117
<b>4. Особенности численного решения задачи Коши</b> .....	119
4.1. Двухслойные разностные схемы .....	119
4.2. Трехслойные разностные схемы .....	120
4.3. Диагонализация матрицы теплоемкости .....	125
<i>Вопросы и задания</i> .....	127
<b>5. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений</b> .....	128
5.1. Основные понятия теории итерационных методов .....	128
5.2. Двухслойные итерационные методы .....	132
5.3. Трехслойные итерационные методы .....	141
5.4. Локально оптимальные трехслойные методы .....	145
5.5. Построение и использование разреженных матриц .....	148
<i>Вопросы и задания</i> .....	157
<b>Приложение. Гиперболическое уравнение теплопроводности</b> .....	158
П1. Постановка задачи .....	158
П2. Построение матричных соотношений метода конечных элементов .....	161
П3. Анализ численных решений .....	165
Заключение .....	168
Литература .....	170
Предметный указатель .....	171