

Секция 1

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

УДК 519.1

DOI 10.17223/2226308X/10/1

ОБОБЩЁННЫЕ 312-ИЗБЕГАЮЩИЕ ПЕРЕСТАНОВКИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛЕМЕРА

Л. Н. Бондаренко, М. Л. Шарапова

Рассматривается преобразование Лемера введенных И. Гесселем и Р. Стенли перестановок (ГС-перестановок). Доказано, что итерация преобразования Лемера множества всех ГС-перестановок порядка $r \geq 1$ приводит к множеству всех 312-избегающих ГС-перестановок порядка r , что даёт новую характеристику этих перестановок. Показано, что статистики rise и imal на множестве 312-избегающих ГС-перестановок порядка r имеют одинаковые распределения. Найдено простое соотношение, связывающее обращение производящей функции многочленов Нараяны порядка r с обращением экспоненциальной производящей функции многочленов Эйлера порядка r .

Ключевые слова: ГС-перестановки, преобразование Лемера, 312-избегающие ГС-перестановки, статистики rise и imal , многочлены Эйлера, многочлены Нараяны, производящая функция, обратная функция.

В [1] для изучения некоторых статистик на группе перестановок \mathfrak{S}_n множества $[n] = \{1, \dots, n\}$ использовано преобразование Лемера. В [2] это преобразование применяется к ГС-перестановкам порядка r мультимножества $\{1^r, \dots, n^r\}$, $r \geq 1$, введенным И. Гесселем и Р. Стенли в [3].

ГС-перестановкой порядка r называется слово $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_{rn}$ над алфавитом $[n]$, все буквы которого, стоящие между любыми двумя вхождениями символа $s \in [n]$, не меньше этого s . Мощность множества $\mathfrak{S}_n^{(r)}$ всех таких перестановок задаётся соотношением $|\mathfrak{S}_n^{(r)}| = 1 \cdot (r+1) \cdot \dots \cdot (r(n-1)+1)$.

Определение 1. Пусть все символы слова $\omega = \omega_1 \dots \omega_m$ — целые положительные числа. Тогда его преобразованием Лемера \mathbf{l} назовём слово $\mathbf{l}\omega = \mathbf{l}\omega_1 \dots \mathbf{l}\omega_m$, в котором $\mathbf{l}\omega_i = \#\{j : \omega_j < \omega_i, 0 \leq j \leq i-1, \omega_0 = 0\}, i \in [m]$.

Определение 1 шире использованных в [1, 2] и позволяет рассматривать для слова ω итерацию преобразования Лемера, т.е. степени $\mathbf{l}^k \omega$, $k \geq 1$. Определяя также число подъёмов $\text{rise}(\omega) = \#\{i \in [m] : \omega_{i-1} < \omega_i, \omega_0 = 0\}$, для ГС-перестановок порядка r нетрудно получить следующее утверждение.

Лемма 1. $\text{rise}(\sigma) = \text{rise}(\mathbf{l}^k \sigma)$, $k \geq 1$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n^{(r)}$, т.е. число подъёмов в ГС-перестановке порядка r не изменяется при применении к ней k раз преобразования Лемера.

Пример 1. Степени $\mathbf{l}^k \sigma$, $k = 1, 2, 3, 4$, $\sigma = 3344551122 \in \mathfrak{S}_5^{(2)}$, имеют вид

$$3344551122 \xrightarrow{\mathbf{l}} 1133551133 \xrightarrow{\mathbf{l}} 1133551155 \xrightarrow{\mathbf{l}} 1133551177 \xrightarrow{\mathbf{l}} 1133551199,$$

а число подъёмов во всех словах равно четырём.

Следует также отметить, что преобразование Лемера 1 задает биекцию $\mathfrak{S}_n^{(r)}$ на множество, не совпадающее с $\mathfrak{S}_n^{(r)}$.

Как и в [4], $\sigma \in \mathfrak{S}_n^{(r)}$ назовём 312-избегающей ГС-перестановкой порядка r , если не существует тройки индексов i, j, k , $i < j < k$, для которых верно неравенство $\sigma_j < \sigma_k < \sigma_i$, а множество всех таких перестановок обозначим $\tilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)}$.

Теорема 1. ГС-перестановка $\sigma \in \tilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{l}\sigma = \mathbf{l}^2\sigma$.

Доказательство. Достаточность: если ГС-перестановка $\sigma \notin \tilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)}$, то из определения 1 следует, что $\mathbf{l}\sigma \neq \mathbf{l}^2\sigma$. Аналогично, необходимость: если $\mathbf{l}\sigma \neq \mathbf{l}^2\sigma$, то ГС-перестановка $\sigma \notin \tilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)}$. ■

Следствие 1. $\mathbf{l}\tilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)} = \mathbf{l}^{n-1}\mathfrak{S}_n^{(r)}$, $n \geq 3$.

Доказательство. Отметим, что при $n = 1, 2$ имеем $\tilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)} = \mathfrak{S}_n^{(r)}$. Если ГС-перестановка $\sigma \notin \tilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)}$, то все ГС-перестановки из $\mathfrak{S}_{n+1}^{(r)}$, полученные из нее с помощью алгоритма генерации ГС-перестановок порядка r ([2, 3]), также не входят в $\tilde{\mathfrak{S}}_{n+1}^{(r)}$. Поэтому по индукции при $n \geq 3$ для $\sigma = 3^r 4^r \dots n^r 1^r 2^r \notin \tilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)}$ получаем $\mathbf{l}^{n-1}\sigma \in \mathbf{l}\tilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)}$, но $\mathbf{l}^{n-2}\sigma \notin \mathbf{l}\tilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)}$, а применение теоремы 1 даёт $\mathbf{l}\tilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)} = \mathbf{l}^{n-1}\mathfrak{S}_n^{(r)}$, $n \geq 3$, так как $\mathbf{l}^{n-1}\mathfrak{S}_n^{(r)} = \mathbf{l}^k\mathfrak{S}_n^{(r)}$, $k \geq n - 1$. ■

Пример 2. Для пояснения следствия 1 дополнительно к примеру 1, в котором $\sigma = 3344551122 \notin \tilde{\mathfrak{S}}_5^{(2)}$, покажем действие преобразования Лемера на ГС-перестановки $2233441155 \in \tilde{\mathfrak{S}}_5^{(2)}$ и $2233551144 \notin \tilde{\mathfrak{S}}_5^{(2)}$:

$$2233441155 \xrightarrow{1} 1133551199 \text{ и } 2233551144 \xrightarrow{1} 1133551177 \xrightarrow{1} 1133551199.$$

Таким образом, теорема 1 и следствие 1 дают новые характеристики множества $\tilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)}$ всех 312-избегающих ГС-перестановок порядка r с помощью преобразования Лемера.

Число подъёмов $\text{rise}(\sigma) = \#\{i \in [rn] : \sigma_{i-1} < \sigma_i, \sigma_0 = 0\}$ в слове $\sigma \in \mathfrak{S}_n^{(r)}$ позволяет определить числа Эйлера $A_{n,k}^{(r)} = \#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n^{(r)} : \text{rise}(\sigma) = k\}$ порядка r , для которых справедливо следующее рекуррентное соотношение [2]:

$$A_{0,k}^{(r)} = \delta_{0,k}, A_{n+1,k}^{(r)} = kA_{n,k}^{(r)} + (rn - k + 2)A_{n,k-1}^{(r)}, k \in \mathbb{Z}, n \geq 0, \quad (1)$$

где символ Кронекера δ_{ij} равен 1 при $i = j$ и 0 при $i \neq j$. Применение (1) для многочленов Эйлера $A_n^{(r)}(t) = \sum_{k=1}^n A_{n,k}^{(r)} t^k$ порядка r приводит к формуле

$$A_0^{(r)}(t) = 1, A_{n+1}^{(r)}(t) = (rn + 1)tA_n^{(r)}(t) + t(1 - t)D_t A_n^{(r)}(t), n \geq 0,$$

где $D_t = d/dt$ — оператор дифференцирования, причём $A_n^{(r)}(1) = |\mathfrak{S}_n^{(r)}|$.

В [2] с помощью (1) показано, что $A_{n,k}^{(r)} = \#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n^{(r)} : \text{imal}(\sigma) = k\}$, где статистика $\text{imal}(\sigma) = |\{\mathbf{l}\sigma_1, \dots, \mathbf{l}\sigma_{rn}\}|$ — число различных символов в слове $\mathbf{l}\sigma$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n^{(r)}$, использована при $r = 1$ в [1] и была введена Д. Дюмоном.

Следует отметить, что распределения статистик rise и imal на множестве $\mathfrak{S}_n^{(r)}$ при $n > 3$ не совпадают. В силу же результатов леммы 1 и теоремы 1 статистики rise и imal на множестве $\tilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)}$ имеют одинаковые распределения, т. е. $\text{rise}(\sigma) = \text{imal}(\sigma)$, $\sigma \in \tilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)}$.

В [4] рассматриваются многочлены Нараяны $\tilde{A}_n^{(r)}(t) = \sum_{k=1}^n \tilde{A}_{n,k}^{(r)} t^k$ порядка r , где $\tilde{A}_{n,k}^{(r)} = \#\{\sigma \in \tilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)} : \text{rise}(\sigma) = k\}$, которые описываются следующим соотношением:

$$\tilde{A}_n^{(r)}(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \binom{rn}{k-1} t^k, \quad \tilde{A}_n^{(r)}(1) = \frac{1}{rn+1} \binom{(r+1)n}{n},$$

причём для производящей функции этих многочленов

$$v = \tilde{A}^{(r)}(t, u) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n^{(r)}(t) u^n$$

получена обратная ей функция

$$u = \tilde{A}^{(r)}(t, v)^{-1} = \frac{v}{(v+t)(v+1)^r}. \quad (2)$$

Для экспоненциальной производящей функции многочленов Эйлера порядка r

$$v = A^{(r)}(t, u) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(r)}(t) \frac{u^n}{n!}$$

авторами доказана формула, задающая обратную ей функцию

$$u = A^{(r)}(t, v)^{-1} = \int_0^v \frac{dz}{(z+t)(z+1)^r}. \quad (3)$$

Сравнение выражений (2) и (3) приводит к следующему неожиданному результату.

Теорема 2. Имеет место равенство $\tilde{A}^{(r)}(t, v)^{-1} = v D_v A^{(r)}(t, v)^{-1}$, где $D_v = d/dv$.

В заключение отметим, что теоремы 1 и 2 и следствие 1 показывают важность выделения в $\tilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)}$ подмножества $\tilde{\mathfrak{S}}_n^{(r)}$ 312-избегающих ГС-перестановок порядка r .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фоата Д.* Распределения типа Эйлера и Макмагона на группе перестановок // Проблемы комбинаторного анализа: сб. статей. М.: Мир, 1980. С. 120–141.
2. *Бондаренко Л. Н., Шарапова М. Л.* Параметрические комбинаторные задачи и методы их исследования // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2010. № 4 (16). С. 50–63.
3. *Gessel I. and Stanley R. P.* Stirling polynomials // J. Combinatorial Theory. Ser. A. 1978. V. 24. P. 24–33.
4. *Бондаренко Л. Н., Шарапова М. Л.* Обобщённые многочлены Нараяны и их q -аналоги // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2016. № 9. С. 6–8.