

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

С. И. Мармо, А. В. Флегель, М. В. Фролов

ЛЕКЦИИ ПО ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Часть II

**Специальная теория относительности
и электромагнитные явления.
Электромагнитные явления в веществе**

Учебное пособие

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2018

Содержание

Специальная теория относительности и электромагнитные явления	5
1. Релятивистская кинематика и механика свободной частицы	5
1.1. Максвелловская электродинамика и принцип относительности	5
1.2. Принципы специальной теории относительности	8
1.3. Преобразования Лоренца	10
1.4. Некоторые следствия из преобразований Лоренца	13
1.5. Геометрический смысл преобразований Лоренца	16
1.6. Релятивистская механика. Функция Лагранжа свободной частицы	18
1.7. Импульс и энергия свободной частицы. Формула Эйнштейна	19
1.8. Четырехмерные векторы и тензоры	23
1.9. Тензорные свойства дифференциальных операций	29
1.10. Примеры четырехмерных векторов	30
1.11. Релятивистская природа силы Лоренца	34
2. Электродинамика в релятивистских обозначениях	36
2.1. Четырехмерный вектор тока	36
2.2. Четырехмерный потенциал электромагнитного поля	37
2.3. Тензор электромагнитного поля. Преобразования Лоренца для поля. Инварианты поля	39
2.4. Эффект Доплера	42
2.5. Уравнения Максвелла в ковариантной форме	44
2.6. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля	46
2.7. Функции Лагранжа и Гамильтона заряда в электромагнитном поле	49
2.8. Уравнение движения заряда в ковариантной форме	53
2.9. Вывод уравнений Максвелла из принципа наименьшего действия	54
Электромагнитные явления в веществе	59
3. Уравнения электромагнитного поля в поляризующихся и намагничивающихся средах	59
3.1. Исходные положения макроэлектродинамики	59

(отсчитанный по часам в системе K' , синхронизованным с часами в K). Обратим внимание, что время не преобразуется — во всех ИСО время одно и то же, оно имеет абсолютный характер. Очевидно, что преобразования (1.1) приводят к классическому закону сложения скоростей

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ и $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt'$ — скорости точки в системах K и K' соответственно.

Запишем уравнение движения частицы с массой m в системе K :

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}. \quad (1.3)$$

Из формул (1.1) следует: $\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt'^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$ — ускорение частицы в двух инерциальных системах одно и то же. Кроме того, в классической механике масса является инвариантной величиной, одинаковой во всех системах отсчета: $m' = m$. Таким же свойством обладает сила: $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$.

Остановимся подробнее на последнем утверждении. В инерциальных системах существуют только силы взаимодействия между телами, которые могут зависеть от относительного положения тел и их относительной скорости. Пусть, для определенности, рассматриваемая частица взаимодействует с другой частицей. Если обозначить радиус-вектор последней через $\tilde{\mathbf{r}}$, а скорость через $\tilde{\mathbf{v}}$, то сила будет зависеть от разностей $\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}$, $\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}). \quad (1.4)$$

Но при переходе в другую инерциальную систему согласно преобразованиям Галилея (1.1) и закону сложения скоростей (1.2)

$$\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}' - \tilde{\mathbf{r}}', \quad \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}' - \tilde{\mathbf{v}}',$$

т.е. расстояния между частицами и их относительные скорости не изменяются. Согласно опытным данным в области применимости классической механики, и само взаимодействие не зависит от того, в какой инерциальной системе оно рассматривается. Поэтому

$$\mathbf{F}'(\mathbf{r}' - \tilde{\mathbf{r}}', \mathbf{v}' - \tilde{\mathbf{v}}') = \mathbf{F}(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}), \quad (1.5)$$

т.е. сами функции \mathbf{F} и их аргументы одинаковы.

Таким образом, при переходе в систему K' уравнение (1.3) сохраняет свою форму ³:

³ Если при некотором преобразовании координат уравнение не меняет своего вида, его принято называть *ковариантным*. Если же еще окажется, что все члены уравнения остаются неизменными, то оно называется *инвариантным* относительно этого преобразования. Например, уравнение плоскости $(\mathbf{n}\mathbf{r}) = a$ только ковариантно, а уравнение сферы $\mathbf{r}^2 = a^2$ еще и инвариантно относительно вращения. Принцип относительности требует только ковариантности относительно преобразований, осуществляющих переход от одной ИСО к другой.

$$m' \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt'^2} = \mathbf{F}', \quad (1.6)$$

причем масса, сила и ускорение в обеих системах одинаковы, меняются лишь обозначения этих величин. Это означает, что уравнение движения (1.3) остается инвариантным (неизменным) относительно преобразований Галилея. Но тогда и решения уравнений (1.3) и (1.6) при одинаковых начальных условиях будут тождественны в соответствии с принципом относительности.

В формулах (1.4), (1.5) отражено представление о взаимодействии тел, которое предполагается справедливым в классической механике. Сила зависит от координат (и, возможно, скоростей) взаимодействующих тел, причем координаты и скорости берутся в один и тот же момент времени. Это означает, что, если положение одного из тел изменилось, второе тело почувствует это изменение немедленно. Взаимодействие передается мгновенно, т.е. с бесконечно большой скоростью.

Представление о бесконечной скорости распространения взаимодействий (иногда говорят о распространении «сигналов») тесно связано с абсолютным характером времени: сигнал, распространяющийся с бесконечной скоростью из точки, где произошло событие, в тот же момент приходит во все точки пространства, в том числе к часам каждой из ИСО, которые регистрируют одинаковое время наступления события $t' = t'' = \dots = t$.

С возникновением электродинамики было естественным предположить, что принцип относительности справедлив и для электромагнитных явлений. Однако оказалось, что уравнения Максвелла не сохраняют своей формы при преобразованиях Галилея (1.1). Несовместимость уравнений Максвелла и принципа относительности классической механики следует уже из того, что теория Максвелла дает конечную величину c для скорости распространения электромагнитных волн в вакууме. Но все ИСО, очевидно, равноправны по отношению к вакууму (в частности, вследствие отсутствия материальной среды в вакууме с ним нельзя связать систему отсчета, в которой бы он покоился). Отсюда логически следует — при допущении полного равноправия всех инерциальных наблюдателей, — что скорость света в вакууме должна равняться одной и той же величине c во всех ИСО. Но, согласно классической механике, при переходе от одной ИСО к другой скорости преобразуются по формуле (1.2).

Возникшее противоречие требовало сделать выбор между тремя возможностями:

- 1) принцип относительности применим в механике и не применим в электродинамике;
- 2) принцип относительности применим и в механике, и в электродинамике; при этом электродинамика в форме уравнений Максвелла неверна;

3) принцип относительности применим и в механике, и в электродинамике; законы механики в ньютоновской форме (а также преобразования координат и времени при переходе в другую ИСО) требуют изменения.

Нековариантность уравнений электродинамики по отношению к преобразованиям Галилея выглядела естественной с позиций «эфирных» теорий, вводивших представление об электромагнитном эфире и рассматривавших электромагнитное поле как особого рода натяжения в нем (по аналогии с натяжениями в упругой среде). В этом случае уравнения Максвелла должны быть справедливыми в единственной системе отсчета, связанной с эфиром. Во всякой другой системе отсчета эфир будет двигаться, поэтому уравнения электромагнитного поля должны содержать в качестве параметра скорость движения системы отсчета относительно эфира. Таким образом, представление об эфире оказывается несовместимым с принципом относительности Галилея. Однако многочисленные экспериментальные попытки обнаружения эфира (среди которых наиболее известны опыт Майкельсона по обнаружению «эфирного ветра» и опыт Физо по обнаружению увлечения эфира движущимися телами) показали неустранимые противоречия в гипотезе эфира и привели к отказу от нее. По современным представлениям электромагнитное поле есть самостоятельный физический объект, не нуждающийся в специальном носителе.

Попытки изменить уравнения Максвелла, чтобы сделать их ковариантными относительно преобразования Галилея, привели к тому, что новые уравнения противоречили опыту.

Таким образом, правильным оказался третий путь: для согласования принципа относительности и электродинамики потребовалось пересмотреть имевшиеся в физике представления о пространстве и времени и заменить преобразования Галилея на преобразования Лоренца.

Рекомендуемая литература: [1, ч. I, § 1], [2, гл. 11, § 1], [9, § 1.1–1.4, 1.7–1.9].

1.2. Принципы специальной теории относительности

В основу новой теории были положены два постулата, которые могут быть сформулированы следующим образом:

1. Все законы природы одинаковы во всех ИСО (а не только законы механики, как утверждал принцип относительности Галилея).
2. Скорость распространения любых взаимодействий конечна (напомним, что в ньютоновской механике скорость распространения взаимодействий считалась бесконечной); максимальная (предельная) скорость передачи взаимодействий (сигналов) совпадает со скоростью света в вакууме.

Совокупность этих двух постулатов называется *принципом относитель-*

ности Эйнштейна. Из принципа относительности следует, очевидно, что максимальная скорость распространения взаимодействий одинакова во всех ИСО. Это значит, что в природе существует скорость, которая не изменяется при переходе от одной ИСО к другой. Отсюда можно заключить, что преобразования Галилея, которые приводят к классическому закону сложения скоростей (1.2), ошибочны.

Наряду с постулатами СТО принципиально важным для ее построения является введение релятивистской системы отсчета. В ньютоновской механике скорость распространения сигналов полагалась бесконечной, поэтому для построения системы отсчета было достаточно одних часов. В СТО учитывается конечность скорости распространения сигналов, поэтому одними часами в системе отсчета ограничиться нельзя. В СТО предполагают, что в любой точке, где определяется время наступления события, в принципе должны быть часы. В пределах одной ИСО устанавливается единое время с помощью синхронизации часов. Эйнштейном было предложено проводить синхронизацию часов с помощью световых сигналов. Из точки A в момент времени t_1 испускается короткий световой сигнал. Установив на часах в точке B в момент прихода светового сигнала время $t = t_1 + r_{AB}/c$ (r_{AB} — известное расстояние между A и B), синхронизируем часы в B с опорными часами в A . Эйнштейновская процедура синхронизации такова, что может быть проведена в любой ИСО. Итак, в релятивистскую систему отсчета входят система координат и набор закрепленных в этой системе синхронизированных часов.

Принципы СТО требуют отказа от классических представлений об абсолютном характере времени. Их прямым следствием является относительность промежутков времени между событиями: утверждение, что между двумя данными событиями прошел определенный промежуток времени, приобретает смысл только тогда, когда указано, к какой системе отсчета это утверждение относится. В частности, события, одновременные в одной ИСО, будут не одновременными в другой системе.

Для уяснения этого рассмотрим простой пример. Пусть поезд (система K') движется равномерно и прямолинейно вдоль платформы (система K). В некоторый момент времени из середины поезда (точка A) в его начало (точка C) и конец (точка B) отправляются световые сигналы. Поскольку скорость распространения сигнала в системе K' , как и во всякой инерциальной системе, равна c (в обоих направлениях), то сигналы достигнут равноудаленных от A точек B и C в один и тот же момент времени (в системе K'). Однако те же самые два события (приход сигнала в B и C) будут не одновременными для наблюдателя в системе K . Действительно, скорость сигналов относительно K согласно принципу относительности равна тому же c , и поскольку точка B движется (относительно системы K) навстречу посланному в нее сигналу, а точка C — по направлению от сигнала (посланного из A в C), то в системе

K сигнал придет в точку B раньше, чем в точку C .

Рекомендуемая литература: [1, ч. I, § 1], [2, гл. 11, § 1], [4, § 1], [8, § 65,66], [9, гл. 2, § 2.1–2.3].

1.3. Преобразования Лоренца

Как отмечено выше, преобразования Галилея не удовлетворяют требованиям теории относительности, поэтому они должны быть модифицированы. Релятивистские формулы преобразования координат и времени при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую можно установить исходя из принципов теории относительности (постоянства скорости света во всех ИСО), а также с использованием свойств однородности и изотропности пространства и однородности времени (пространство и время обладают этими свойствами по представлениям как классической, так и релятивистской физики). Основываясь на этих положениях, будем формулировать математические требования, которым должны удовлетворять формулы преобразований, и на каждом этапе искать соответствующие ограничения на искомые формулы, пока полностью не определим их вид.

1. Из однородности пространства и времени вытекает, что связь между координатами события в двух ИСО должна быть линейной:

$$x' = \alpha x + \alpha' y + \beta' z + \beta t + \rho \quad \text{и т.д.}, \quad (1.7)$$

где $\alpha, \beta, \alpha', \dots$ — постоянные коэффициенты. Если бы эти величины были функциями координат и времени (т.е. связь между штрихованными и нештрихованными величинами была нелинейной), это означало бы, что закон преобразования (1.7) неодинаков для разных точек пространства и для разных моментов времени. Это противоречило бы однородности пространства-времени — по закону преобразования можно было бы отличать одни области пространства (и моменты времени) от других. Но коэффициенты α, β и т.п. могут зависеть, разумеется, от относительной скорости.

2. Конкретизируем теперь рассматриваемые системы (рис. 1). Пусть соответствующие оси координат в них параллельны и относительное движение происходит вдоль оси x со скоростью V , а начала отсчета выбраны так, что при $t = 0$ точка $x' = y' = z' = 0$ (начало координат системы K') совпадает с точкой $x = y = z = 0$ (началом координат системы K). Часы в системе K' установлены так, чтобы в момент, когда начала систем координат совпадают, они показывали время $t' = 0$. В этом случае свободные члены в равенствах (1.7) (ρ и т.п.) обратятся в нуль.

Поскольку оси координатных систем параллельны, то плоскость xy совпадает с плоскостью $x'y'$. Это означает, что при $z' = 0$ должно быть и $z = 0$, причем эти равенства должны выполняться при любых x', y', t' и соответственно x, y, t . Это возможно только в том случае, если связь между z и z'