

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**В.В. Быкова**

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ АНАЛИЗА  
ПАРАМЕТРИЗИРОВАННЫХ АЛГОРИТМОВ**

Красноярск  
СФУ  
2011

УДК 510.52+004.051

ББК 22.18

Б 952

Рецензенты:

*Б.С. Добронец*, зав. кафедрой «Информационные системы» ИКИТ СФУ,  
доктор физико-математических наук, профессор;

*Л.Ф. Ноженкова*, зав. отделом прикладной информатики ИВМ СО РАН,  
доктор технических наук, профессор.

**Быкова, В.В.**

**Б 952** Теоретические основы анализа параметризованных алгоритмов: монография / В.В. Быкова. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2011. – 180 с.

ISBN 978-5-7638-2488-9

Книга посвящена анализу параметризованных алгоритмов – современному направлению теории сложности вычислений. Параметризованные алгоритмы направлены на поиск точных решений NP-полных задач, когда параметр решаемой задачи мал по сравнению с длиной входа алгоритма. Роль этого параметра – учесть информацию о структуре исходных данных алгоритма и выделить основной источник неполиномиальной сложности NP-трудной задачи. В работе представлена классификация параметризованных алгоритмов по вычислительной сложности на основе эластичностей функций сложности, описывающих потребности алгоритмов в необходимых ресурсах. С помощью эластичностей исследовано влияние параметра на время выполнения параметризованного алгоритма. Развита методика анализа рекурсивных алгоритмов.

Для специалистов в области разработки, анализа и исследования алгоритмов, а также для студентов, аспирантов, научных работников, преподавателей высших учебных заведений.

**УДК 510.52+004.051**

**ББК 22.18**

© Сибирский федеральный  
университет, 2011

© В.В. Быкова, 2011

ISBN 978-5-7638-2488-9

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b> .....	3
<b>1. Предварительные обсуждения</b> .....	9
1.1. Алгоритмичность и конструктивность.....	9
1.2. Алгоритмичность и вычислимость.....	14
1.3. Концептуальные основы анализа сложности алгоритмов.....	21
1.4. Асимптотические обозначения и их использование при анализе алгоритмов.....	30
1.5. Соглашения относительно функций сложности алгоритма. Характеризация класса логарифмически-экспоненциальных функций.....	35
Резюме.....	39
<b>2. Классическая и современная систематизации алгоритмов по сложности (одномерный случай)</b> .....	42
2.1. Классическая систематизация алгоритмов по скорости роста функций сложности.....	42
2.2. Эластичность и ее свойства.....	49
2.3. Несколько вспомогательных утверждений.....	52
2.4. Шесть классов $\mathcal{L}$ -функций.....	53
2.5. Теорема о классификации $\mathcal{L}$ -функций на основе эластичности.....	57
2.6. Современная классификация алгоритмов по асимптотике эластичности функций сложности.....	64
2.7. Методика сравнения алгоритмов по асимптотике эластичности.....	67
2.8. Неэластичные, эластичные и суперэластичные алгоритмы.....	70
Резюме.....	71
<b>3. Математические методы анализа алгоритмов</b> .....	74
3.1. Основные приемы анализа сложности итерационных алгоритмов.....	74
3.2. Проблемы анализа сложности рекурсивных алгоритмов.....	79

3.3. Рекурсивные алгоритмы и рекуррентные соотношения.....	81
3.4. Метод оценки решений специального типа рекуррентных соотношений, характерных для принципа «разделяй и властвуй».....	85
3.5. Метод оценки решений специального типа рекуррентных соотношений, характерных для аддитивного уменьшения размерности задачи.....	89
Резюме.....	99
<b>4. Математический анализ параметризованных алгоритмов</b>	102
4.1. О классической сложностной дихотомии и подходах к решению трудноразрешимых задач.....	103
4.2. Параметризация задач и алгоритмов как путь управления сложностью вычислений. FPT-разрешимость.....	110
4.3. Проблемы параметризованной алгоритмики.....	113
4.4. Классификация параметризованных алгоритмов на основе асимптотики частных эластичностей функций сложности (двумерный случай).....	116
4.5. Методика анализа воздействия параметра на сложность параметризованного алгоритма.....	121
4.6. Альтернативные характеристики FPT-разрешимости.....	129
Резюме.....	130
<b>Приложение 1. Формулы, применяемые при анализе алгоритмов.....</b>	134
П.1.1. Оценки некоторых формул суммирования.....	134
П.1.2. Комбинаторные числа и их оценки.....	135
П.1.3. Оценки для экспонент и логарифмов.....	135
П.1.4. Формулы округления снизу и сверху.....	135
<b>Приложение 2. Краткие сведения о рекуррентных соотношениях с постоянными коэффициентами.....</b>	136
П.2.1. Методы решения однородных линейных рекуррентных соотношений.....	136
П.2.2. Чувствительность порядка роста функции сложности к начальным условиям рекуррентного соотношения.....	140
П.2.3. Методы решения неоднородных линейных рекуррентных соотношений.....	141

<b>Приложение 3. Рекурсия в вычислительных задачах линейной алгебры</b> .....	148
П.3.1. Быстрое умножение квадратных матриц по принципу «разделяй и властвуй».....	148
П.3.2. Реализация схемы исключения Гаусса путем аддитивного уменьшения размерности задачи.....	151
П.3.3. Полиномиальная разрешимость и сводимость основных задач линейной алгебры.....	159
<b>Библиографический список</b> .....	166
<b>Указатель обозначений</b> .....	177