

УДК 533.951

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДИМОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

А. И. Задорожный, Р. А. Грунтфест

Ростовский государственный университет, 344007 Ростов-на-Дону

Исследовано влияние конечной электрической проводимости (конечности магнитного числа Рейнольдса) как диссипативного фактора на малые собственные колебания тяжелой невязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины, свободная поверхность которой граничит с вакуумом. На жидкость действует внешнее постоянное горизонтальное магнитное поле. Получено уравнение баланса энергии, и доказана теорема о затухании волн во времени. Проведенные численные расчеты и построенные асимптотические формулы дают полную картину спектра, включающую и его непрерывную часть. Приведены амплитудно-частотные характеристики волновых мод.

В магнитной гидродинамике (МГД) жидкость принято называть идеальной, если она одновременно является невязкой и бесконечно проводящей. Конечное значение коэффициента электропроводности является диссипативным фактором, приводящим к затуханию волн. При исследовании колебаний, как правило, рассматривается два предельных случая длинных и коротких волн, причем в качестве коротковолнового приближения принята модель жидкости бесконечной глубины со свободной поверхностью. Исследования влияния вязкости на свободные поверхностные волны, начатые работами Г. Ламба [1] в конце XIX в., в настоящее время имеют заверченный математический вид [2]. Теория МГД-волн в проводящей жидкости еще далека от завершения. Имеется ряд исследований по этой теме (см., например, [3–7]). В указанных работах спектр свободных колебаний диссипативных МГД-волн в канонических областях подробно не рассматривался. В предлагаемой работе теоретически и численно изучен указанный спектр для жидкости бесконечной глубины. Рассмотрены дискретный и сплошной спектры колебаний тяжелой жидкости конечной электропроводности при действии внешнего горизонтального магнитного поля.

1. Постановки задачи. Рассмотрим невязкую электропроводную жидкость, занимающую нижнее полупространство. Над жидкостью находится вакуум. Введем декартову систему координат, плоскость Oxy которой совпадает с невозмущенной горизонтальной поверхностью жидкости, а ось z направлена вертикально вниз. Пусть на жидкость действуют сила тяжести $(0, 0, g)$ и постоянное магнитное поле $(H_0, 0, 0)$. В работе исследуются двумерные собственные колебания жидкости в плоскости xz . Движение жидкости и электромагнитное поле описываются уравнениями, приведенными, например, в [8]. Разделим пространство на две области:

1. Жидкость ($z \geq 0$). Пусть $\mathbf{V}(V_x, 0, V_z)$ — вектор скорости, ρ — плотность, σ — электропроводность, $\mathbf{h}(h_x, 0, h_z)$, $\mathbf{e}(0, e_y, 0)$ — возмущения напряженностей магнитного и электрического полей, вызываемые движением жидкости. Предполагая колебания малыми, запишем линеаризованные уравнения импульсов и уравнения индукции [8] в безразмерном виде

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\text{grad}(p^*) + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x}, \quad \text{div } \mathbf{V} = 0, \quad \text{div } \mathbf{h} = 0, \quad \frac{\partial h_x}{\partial t} = -\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}_m} \Delta h_x, \quad (1)$$

$$\frac{\partial h_z}{\partial t} = -\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}_m} \Delta h_z, \quad e_y = \frac{1}{c} \left[\frac{1}{\text{Re}_m} \left(\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} \right) - V_z \right], \quad p^* = p_a + \frac{z}{\text{Al}} + p_d + h_x,$$

где $p_a = \text{const}$ — давление на свободной поверхности; p_d — гидродинамическое давление; Δ — оператор Лапласа.

2. Вакуум ($z < 0$). Обозначим через $\mathbf{h}_1(h_{1x}, 0, h_{1z})$, $\mathbf{e}_1(e_{1x}, e_{1y}, e_{1z})$ возмущения напряженности электромагнитного поля. Эти функции удовлетворяют уравнениям Максвелла (током смещения пренебрегаем)

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{h}_1 = 0, \quad \text{div } \mathbf{h}_1 = 0, \quad \frac{\partial e_{1y}}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial h_{1x}}{\partial t}, \quad \frac{\partial e_{1y}}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial h_{1z}}{\partial t}, \\ \frac{\partial e_{1x}}{\partial z} - \frac{\partial e_{1z}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial e_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial e_{1z}}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В уравнениях (1), (2) $c = c_\nu \sqrt{4\pi\rho}/H_0$ — скорость; c_ν — размерная скорость света; $\nu_m = c_\nu^2/(4\pi\sigma)$ — магнитная вязкость; $\text{Re}_m = LH_0/(\nu_m \sqrt{4\pi\rho})$ — магнитное число Рейнольдса; $\text{Al} = H_0^2/(4\pi\rho gL)$ — число Альфвена; $L = \Lambda/(2\pi)$; Λ — длина волны; $L\sqrt{4\pi\rho}/H_0$ — масштаб времени.

Пусть $z = \zeta(x, t)$ — уравнение для возвышения свободной поверхности (СП). Введем на СП нормальные (индекс n) и касательные (индекс τ) компоненты вектора \mathbf{H} и тензора T напряженности магнитного поля, а также тензора полных напряжений P в линеаризованной форме:

$$\begin{aligned} H_n = h_z - \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad H_\tau = 1 + h_x, \quad T_{nn} = -0,5 - h_x, \quad T_{n\tau} = h_z - \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ P_{nn} = -p + T_{nn}, \quad P_{n\tau} = T_{n\tau}, \quad p = p_a + z/\text{Al} + p_d. \end{aligned}$$

Для систем (1), (2) зададим следующие граничные условия:

1) на СП (граница раздела жидкость — вакуум) $z = 0$:

$$\begin{aligned} V_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad [H_n] = 0 \rightarrow h_z = h_{1z}, \\ [e_\tau] = 0 \rightarrow e_y = e_{1y} = \frac{1}{c} \left[\frac{1}{\text{Re}_m} \left(\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} \right) - V_z \right], \quad e_x = e_{1x} = 0, \\ [P_{nn}] = 0 \rightarrow p^* + \zeta/\text{Al} = h_{1x}, \quad [T_{n\tau}] = 0 \rightarrow h_x - h_{1x} = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

2) на бесконечности $|z| \rightarrow \infty$. Здесь возможны два случая:

- а) затухание полей в жидкости (дискретный спектр);
- б) ограниченность полей в жидкости (сплошной спектр).

Необходимость рассмотрения сплошного спектра состоит в том, что в рамках модели слоя бесконечной глубины находятся решения, имеющие смысл и для слоя конечной глубины.

2. Сведение к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), теорема о диссипации. Для нахождения свободных колебаний применим обычное разделение переменных. Пусть

$$(V_x, V_z, h_x, h_z, e_x, e_y, e_z, p^*, \zeta) = (U, W, X, Z, E_x, E_y, E_z, Q, S) \exp(-\lambda t + ix),$$

где λ — искомый спектральный параметр, вещественная часть которого есть декремент затухания, а мнимая часть — фазовая скорость бегущей волны. Аналогичные обозначения введены для вакуума (добавлен нижний индекс 1). Подставляя последнее выражение в (1), (2), получаем системы ОДУ.

1. Жидкость:

$$-\lambda U(z) = -iQ(z) + iX(z), \quad -\lambda W(z) = -Q'(z) + iZ(z),$$

$$\begin{aligned} -\lambda X(z) &= -W'(z) + [X''(z) - X(z)]/\text{Re}_m, & iX(z) + Z'(z) &= 0, \\ -\lambda Z(z) &= -W(z) + [Z''(z) - Z(z)]/\text{Re}_m, & iU(z) + W'(z) &= 0, \\ E_y &= \frac{1}{c} \left[\frac{1}{\text{Re}_m} (X'(z) - iZ(z)) - W(z) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

2. Вакуум:

$$\begin{aligned} X_1'(z) - iZ_1(z) &= 0, & iX_1(z) + Z_1'(z) &= 0, & E_{1y}'(z) &= -(\lambda/c)X_1(z), & E_{1x}'(z) &= iE_{1z}(z), \\ iE_{1y}(z) &= (\lambda/c)Z_1(z), & iE_{1x}(z) + E_{1z}'(z) &= 0. \end{aligned}$$

Преобразуем граничные условия (3) на СП:

$$\begin{aligned} Q(0) + S/\text{Al} &= X_1(0), & X(0) &= X_1(0), & Z(0) &= Z_1(0), & W(0) &= -\lambda S, \\ E_{1x}(0) &= 0, & E_{1y}(0) &= \frac{1}{c} \left[\frac{1}{\text{Re}_m} (X'(0) - iZ(0)) - W(0) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Задача для вакуума легко решается. С учетом затухания волн на бесконечности ($z \rightarrow \infty$) имеем

$$\begin{aligned} Z_1(z) &= Z(0) \exp(z), & X_1(z) &= iZ(0) \exp(z), \\ E_{1y}(z) &= -i(\lambda/c) Z(0) \exp(z), & E_{1x}(z) &= 0, & E_{1z}(z) &= 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим систему (4) для жидкости. Дополнительные преобразования условий (5) на СП дают

$$W(0) + \lambda S = 0, \quad Q(0) + S/\text{Al} = iZ(0), \quad X(0) = iZ(0). \quad (6)$$

С учетом (4) и (6) можно доказать следующую теорему о диссипации.

Теорема. Все колебания жидкости затухают при $0 < \text{Re}_m < \infty$ и $\text{Al} > 0$, т. е. собственные числа дискретного спектра лежат в правой комплексной полуплоскости ($\text{Re}(\lambda) > 0$).

Умножим первые четыре уравнения системы (4) на комплексно-сопряженные величины и проинтегрируем по z от 0 до ∞ . Затем проинтегрируем по частям, учитывая условия затухания на бесконечности, и сложим полученные выражения. В результате имеет место уравнение баланса энергии

$$\begin{aligned} \lambda(\|U\|^2 + \|W\|^2) + \bar{\lambda}(\|X\|^2 + \|Z\|^2) &= \left(\frac{1}{\text{Re}_m} - \bar{\lambda} \right) |Z(0)|^2 + \\ &+ \frac{1}{\text{Re}_m} (\bar{X}'(0)X(0) + \bar{Z}'(0)Z(0) - \bar{Z}''(0)Z(0)) + \frac{1}{\text{Re}_m} (\|X'\|^2 + \|Z'\|^2 + \|X\|^2 + \|Z\|^2). \end{aligned}$$

Здесь норма имеет смысл $\|F\|^2 = \int_0^\infty |F(z)|^2 dz$; черта сверху обозначает комплексную сопряженность.

Далее, с учетом граничных условий (6) на СП получаем

$$\begin{aligned} \lambda(\|U\|^2 + \|W\|^2) + \bar{\lambda}(\|X\|^2 + \|Z\|^2 + |Z(0)|^2) + \frac{1}{\text{Al}\bar{\lambda}} |W(0)|^2 &= \\ &= \frac{2}{\text{Re}_m} |Z(0)|^2 + \frac{1}{\text{Re}_m} (\|X'\|^2 + \|Z'\|^2 + \|X\|^2 + \|Z\|^2). \end{aligned}$$