

УДК 517.95
ББК 22.311
С12

Сабитов К. Б.

С12 Уравнения математической физики : учебник для вузов : в 2 ч. Ч. 1 / К. Б. Сабитов. — 4-е изд., электрон. — М. : Лаборатория знаний, 2024. — 326 с. — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10". — Загл. с титул. экрана. — Текст : электронный.

ISBN 978-5-93208-620-9 (Ч. 1)

ISBN 978-5-93208-643-8

В книге дан вывод уравнений математической физики, приведены классические постановки основных задач, аналитические методы их решения, представлены обобщенные по Соболеву решения краевых задач для уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов, вариационный и галеркинский методы решения краевых задач, методы интегральных преобразований, возмущений, автомодельных решений и конечных разностей решения краевых задач уравнений математической физики. В отличие от известных учебников данное пособие содержит новый материал по уравнениям смешанного типа, моделирующим околосзвуковые течения.

Допущено УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению ВПО 010400 «Прикладная математика и информатика».

УДК 517.95
ББК 22.311

В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации

ISBN 978-5-93208-620-9 (Ч. 1)
ISBN 978-5-93208-643-8

© Лаборатория знаний, 2024
© Сабитов К. Б., 2024

Оглавление



Предисловие к третьему изданию	6
Предисловие ко второму изданию	7
Список некоторых обозначений и сокращений	11
Глава 1. Постановка основных задач для уравнений математической физики	13
§ 1. Дифференциальные уравнения в частных производных. Основные понятия	13
§ 2. Вывод уравнения колебаний струны. Постановка основных начально-граничных задач	22
§ 3. Вывод уравнения теплопроводности. Постановка основных начально-граничных задач	28
§ 4. Задачи, приводящиеся к уравнениям Пуассона и Лапласа. Постановка основных граничных задач	34
§ 5. Задача Коши. Характеристики. Теорема Коши—Ковалевской	36
§ 6. Понятие о корректно поставленной краевой задаче для дифференциальных уравнений. Примеры некорректных краевых задач	42
Глава 2. Классификация линейных уравнений в частных производных второго порядка	47
§ 7. Типы линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка	47
§ 8. Приведение к каноническому виду дифференциального уравнения второго порядка от двух независимых переменных	53
Глава 3. Уравнения гиперболического типа	62
§ 9. Первая начально-граничная задача для уравнения колебаний струны	62
1. Постановка задачи. Энергетическое неравенство. Единственность и устойчивость решения (62). 2. Существование решения (69).	
§ 10. Общие замечания о методе разделения переменных	86
1. Замкнутость и полнота ортогональных систем функций (86). 2. Вторая и третья начально-граничные задачи для уравнения струны (88). 3. Начально-граничная задача для более общего уравнения гиперболического типа (90).	
§ 11. Задача Дирихле для уравнения струны	98

§ 12. Задача Коши для уравнения колебаний струны. Формула Даламбера	106
1. Постановка задачи Коши для уравнения струны (106).	
2. Построение общего решения уравнения струны (106).	
3. Построение решения задачи Коши (108). 4. Физическая интерпретация решения задачи Коши (112).	
§ 13. Задачи Гурса и Дарбу для уравнения струны	114
§ 14. Задача Коши для трехмерного и двумерного волновых уравнений	119
1. Задача Коши для трехмерного однородного волнового уравнения. Формула Пуассона. Принцип Гюйгенса (119).	
2. Задача Коши для трехмерного неоднородного волнового уравнения. Формула Кирхгофа (128). 3. Задача Коши для двумерного волнового уравнения. Метод спуска (132).	
4. Энергетическое неравенство. Непрерывная зависимость решения. Единственность решения (134).	
§ 15. Задачи Коши и Гурса для общего линейного гиперболического уравнения. Метод последовательных приближений	139
1. Задача Коши (139). 2. Задача Гурса (145).	
§ 16. Метод Римана для построения решения задач Коши и Гурса	149
1. Понятие сопряженного дифференциального оператора. Формула Грина (149). 2. Метод Римана (149).	
§ 17. Решение задачи Коши методом Римана для телеграфного уравнения	154
1. Вывод телеграфного уравнения (154). 2. Постановка задачи Коши (157). 3. Построение функции Римана (158).	
4. Построение решения задачи Коши (159).	
§ 18. Решение задачи Коши методом Римана для вырождающегося гиперболического уравнения	161
1. Постановка задачи Коши (161). 2. Построение функции Римана (162). 3. Построение решения задачи Коши (165).	
Глава 4. Уравнения эллиптического типа	170
§ 19. Общие сведения об эллиптических уравнениях	170
§ 20. Гармонические функции. Примеры. Теорема Кельвина ...	172
§ 21. Внутренний принцип экстремума гармонических функций. Единственность и устойчивость решения задачи Дирихле.	178
§ 22. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круговых областях. Формула Пуассона	182
1. Решение задачи Дирихле в круговых областях (182).	
2. Формула Пуассона. Обобщенное решение задачи Дирихле (188).	
§ 23. Свойства гармонических функций	191
§ 24. Граничный принцип экстремума для гармонических функций. Задачи Неймана и Пуанкаре для уравнения Пуассона	202
§ 25. Внешние граничные задачи для уравнения Лапласа	209

§ 26. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона методом Грина	215
1. Формула Грина оператора Лапласа. Интегральное представление решения уравнения Пуассона (215). 2. Функция Грина задачи Дирихле и ее свойства (220). 3. Решение задачи Дирихле в произвольной области методом Грина (226). 4. Построение решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге и в полукруге (233). 5. Построение решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре и в полушаре (236). 6. Метод конформных отображений (238).	
§ 27. Решение задачи Неймана для уравнения Пуассона методом Грина	242
1. Необходимое условие разрешимости задачи Неймана (242). 2. Функция Грина задачи Неймана (243). 3. Построение функции Грина задачи Неймана в шаре и вне шара (249).	
§ 28. Решение граничных задач для уравнения Лапласа методами потенциала и интегральных уравнений.	255
1. Потенциалы объема, простого и двойного слоев (256). 2. Поверхности Ляпунова (259). 3. Свойства потенциала двойного слоя (262). 4. Свойства потенциала простого слоя (265). 5. Интегральные уравнения Фредгольма (269). 6. Сведение задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям (271).	
§ 29. Уравнение Гельмгольца	278
1. Физическая интерпретация решения (278). 2. Фундаментальные решения уравнения Гельмгольца (279). 3. Интегральное представление решения. Функция Грина (281). 4. Внутренние задачи для уравнения Гельмгольца (284). 5. Внешние задачи. Принцип излучения (288).	
Глава 5. Уравнения параболического типа	297
§ 30. Первая начально-граничная задача для уравнения теплопроводности	297
1. Постановка задачи. Принцип экстремума. Единственность и устойчивость решения (297). 2. Решение задачи методом разделения переменных (300). 3. Начально-граничная задача для уравнения теплопроводности с обратным направлением времени (304). 4. Функции Грина первой начально-граничной задачи (305). 5. Понятие δ -функции Дирака (306). 6. Обобщенное решение первой начально-граничной задачи (308).	
§ 31. Распространение тепла в бесконечном стержне (задача Коши)	310
1. Постановка задачи Коши. Единственность решения (310). 2. Существование решения задачи Коши (312). 3. Физический смысл фундаментального решения (317).	
Список литературы	320