

УДК 692.7.052

Сигма-точечный алгоритм фильтра Калмана в задаче автономной навигации космического аппарата

В. А. Филимонов¹, В. И. Тисленко², В. Ю. Лебедев³, А. П. Кравец⁴

^{1,4}аспирант, ²д. т. н., проф., ³к. т. н.

Томский университет систем управления и радиоэлектроники

e-mail: Svv281088@gmail.com, wolar1491@yandex.ru

Аннотация. В работе выполнен анализ среднеквадратичной погрешности (СКП) оценок вектора состояния, который содержит текущие координаты, скорость космического аппарата (КА), а также смещения шкалы времени и частоты бортового опорного генератора (ОГ). Оценки формируются в навигационном вычислителе, на вход которого поступают наблюдения в виде псевдодалейностей и псевдоскоростей по нескольким навигационным аппаратам ГНСС. Математическая модель состояния учитывает наличие случайных возмущений по компонентам ускорения КА, обусловленных наличием вариаций орбиты КА, каналы наблюдений содержат случайные ошибки в виде белого гауссовского шума. Модель вариаций частоты ОГ соответствует свойствам рубидиевого стандарта. Показано, что в условиях движения КА на высокоэллиптической орбите при больших величинах геометрического фактора GDOP и слабых сигналах алгоритм сигма-точечного фильтра Калмана обеспечивает СКП местоположения менее 1 м, модуля скорости менее 0,01 м/с, смещения шкалы времени 1,9 нс и относительной нестабильности частоты $3 \cdot 10^{-13}$. Алгоритм сохраняет работоспособность при нарушении полноты созвездия НКА до нескольких минут.

Ключевые слова: автономная система навигации, космический аппарат, оценка координат, смещение бортовой шкалы времени, нестабильность частоты, сигма-точечный фильтр Калмана

Sigma Point Algorithm of the Kalman Filter in Spacecraft Autonomous Navigation

V. A. Filimonov¹, V. I. Tislenko², V. Yu. Lebedev³, A. P. Kravets⁴

^{1,4}post-graduate student, ²doctor of engineering science, professor, ³candidate of engineering science

Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics

e-mail: Svv281088@gmail.com, wolar1491@yandex.ru

Abstract. This paper describes the analysis of a RMS error of the state vector estimations, which contain the current coordinates and velocity of a spacecraft (SC). Moreover, it includes shift of the time scale and frequency of the onboard reference generator (RG). The estimates are transferred to the output of the navigation computer, where they are formed. The processing algorithm uses observation data in the form of pseudoranges and pseudovelocities according to several GNSS SC. The mathematical state model takes into account the presence of random fluctuations based on the SC acceleration components caused by SC orbit variations. Observation channels contain random errors in the form of white Gaussian noise. The variation model of RG frequency corresponds to the model of the rubidium frequency standard. The article shows that the sigma point Kalman filter provides a positioning RMS error of less than 1 m, a velocity model error of less than 0.01 m/s, a time scale shift of less than 1.9 ns, and a frequency instability of less than $3 \cdot 10^{-13}$, in conditions when SC moves in a highly elliptical orbit (HEO) at high values of GDOP and weak signals. The algorithm does not lose its efficiency even at incomplete constellations of GNSS SC up to several minutes.

Keywords: autonomous navigation system, spacecraft, coordinates estimation, onboard time scale bias, frequency instability, sigma point Kalman filter

Введение

Проблемы разработки и научно-технические принципы проектирования систем автономной навигации (САН) систематически изложены в [1–3]. В работе предполагается, что структура САН соответствует схеме с двухэтапной процедурой решения навигационной задачи [3]. На первом этапе формируется вектор наблюдений $\mathbf{z}(t_k)$, состоящий из измерений псевдодальностей и псевдоскоростей, содержащих возмущения. Вектор $\mathbf{z}(t_k)$ связан нелинейным безынерционным преобразованием с информативным процессом $\mathbf{x}(t)$ соотношением вида: $\mathbf{z}(t_k) = \mathbf{h}[\mathbf{x}(t_k), \mathbf{n}_z(t_k)]$, где $\mathbf{n}_z(t_k)$ — вектор гауссовских шумов, которые попадают в полосу каналов слежения и обусловлены наличием собственного шума на входе приемника.

На втором этапе обработки выполняется фильтрация наблюдений $\mathbf{z}(t_k)$ с целью получения оценки $\hat{\mathbf{x}}(t)$ информативного процесса $\mathbf{x}(t)$, состоящего из шести компонент, определяющих текущие декартовы координаты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ КА, составляющие его скорости $Vx(t)$, $Vy(t)$, $Vz(t)$, и дополнительно двух компонент $\delta_{\text{ог}}^T(t) = [\delta(t) \ \dot{\delta}(t)]$, определяющих динамику вариаций шкалы времени $\delta(t)$ бортового опорного генератора (ОГ).

Известно [4–6], что оптимальную (по квадратичному критерию качества) текущую оценку $\hat{\mathbf{x}}(t_k)$ при заданной последовательности наблюдений $\mathbf{Z}_0^k = \{\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k\}$ определяет оператор условного математического ожидания $\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{M}[\mathbf{x}_k / \mathbf{Z}_0^k]$ по апостериорной плотности вероятностей (АПВ) $W[\mathbf{x}_k / \mathbf{Z}_0^k]$. Свойство марковости процесса $\mathbf{x}(t)$ и задание моделей в виде системы дифференциальных уравнений (СДУ) первого порядка позволяют получить рекурсивную процедуру вычисления АПВ [4–6]. Численный алгоритм фильтра частиц (particle filter) реализует вычисление оптимальных текущих оценок состояния [4].

Практическое применение находят квазиоптимальные алгоритмы, основанные на гауссовской аппроксимации АПВ, что эквивалентно замене исходной нелинейной задачи ее линейным аналогом [4–6]. Далее, как правило, применяют известный алгоритм расширенного фильтра Калмана (extended Kalman filter — ЕKF) [4, 6].

В данной работе используется сигма-точечный алгоритм фильтра Калмана (sigma-point Kalman

filter — SPKF), позволяющий более корректно, по сравнению с ЕKF, выполнить сведение нелинейной задачи к линейному варианту [4, 8–10]. Применение алгоритма SPKF для решения задачи навигации показано в [12].

Постановка задачи и алгоритм фильтрации

Вектор-столбец состояния $\mathbf{x}(t)$ определим в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T(t) &= \\ &= [x(t) \ y(t) \ z(t) \ Vx(t) \ Vy(t) \ Vz(t) \ \delta t(t) \ \dot{\delta} t(t)] = \\ &= [\mathbf{x}_{\text{ка}}(t) \ \delta_{\text{ог}}(t)]. \quad (1) \end{aligned}$$

Навигационный вычислитель выполняет функцию координатного и частотно-временного обеспечения САН.

Отметим, что в (1) из двух компонент $x_7(t) \triangleq \delta(t)$ и $x_8(t) \triangleq \dot{\delta}(t)$, последняя, связанная с частотой ОГ, является непосредственно управляемой. Математическая модель вектора $\mathbf{z}(t_k)$ определена заданием системы $2m$ ($i = 1, \dots, m$) уравнений для псевдодальностей и псевдоскоростей, которые имеют вид

$$\begin{aligned} z1_k^{(i)} &= R_k^{(i)} + n_{\Delta t k}^{(i)} = \\ &= \left[(x_k - X_k^{(i)})^2 + (y_k - Y_k^{(i)})^2 + (z_k - Z_k^{(i)})^2 \right]^{0,5} + \\ &\quad + c \cdot \delta t_k + c \cdot n_{\Delta t k}^{(i)}; \\ z2_k^{(i)} &= \dot{R}_k^{(i)} + n_{f k}^{(i)} = \\ &= (Vx_k - \dot{X}_k^{(i)}) \cdot e_x + (Vy_k - \dot{Y}_k^{(i)}) \cdot e_y + \\ &\quad + (Vz_k - \dot{Z}_k^{(i)}) \cdot e_z + c \cdot \dot{\delta} t_k + c \cdot n_{f k}^{(i)}, \quad (2) \end{aligned}$$

где $R_k^{(i)}$ — текущая истинная дальность; $X_k^{(i)}$, $Y_k^{(i)}$, $Z_k^{(i)}$ и $\dot{X}_k^{(i)}$, $\dot{Y}_k^{(i)}$, $\dot{Z}_k^{(i)}$ — соответственно компоненты векторов положения и скорости i -го НКА на момент времени t_k в инерциальной геоцентрической системе координат; $\mathbf{e}_k = [e_x \ e_y \ e_z] = \mathbf{r}(t)/r(t)$ — единичный вектор, определяющий направление визирования по линии НКА–КА. Аддитивные возмущения $\mathbf{n}_{zk}^{(i)} = [n_{\Delta t k}^{(i)} \ n_{f k}^{(i)}]^T$ в виде случайных стационарных гауссовских дискретных последователь-

ностей имеют нулевые средние значения, некоррелированы во времени и между собой в одном и в разных каналах.

Система уравнений для $\mathbf{x}(t)$ определена заданием шести нелинейных дифференциальных уравнений орбитального движения КА для $\mathbf{x}_{\text{ка}}(t)$, которые дополняются СДУ для компонент случайного вектора $\delta_{\text{ор}}(t)$. В уравнениях движения КА учитывалась только неравномерность гравитационного потенциала Земли. Уравнения орбитального движения КА соответствуют приведенным в [1, 3] и отличаются от них введением аддитивных некоррелированных между собой БГШ по всем компонентам ускорения, что позволяет учесть влияние возмущающих орбиту КА факторов.

Оценка $\hat{\mathbf{x}}(t_k)$ формируется в замкнутом контуре управления ОГ на шаге фильтрации состояния (1), на основе обработки наблюдений (2) с помощью квазиоптимального фильтра, реализующего алгоритм SPKF.

В дискретной форме с учетом управления ОГ по частоте разностные уравнения для переменных состояния ОГ принимают следующий вид [11]:

$$\begin{aligned} x_7(k) &= x_7(k-1) + x_8(k-1) \cdot T + n_7(k-1), \\ x_8(k) &= x_8(k-1) + \delta U(t_{k-1}) + n_8(k-1), \end{aligned} \quad (3)$$

где T — интервал временной дискретизации в вычислителе при формировании оценок состояния $\hat{\mathbf{x}}_k$; $\delta U(t_{k-1})$ — приращение функции управления на интервале T ; $n_7(k-1)$ и $n_8(k-1)$ — дискретные независимые во времени и коррелированные между собой гауссовские последовательности. Ковариационная матрица вектора $\mathbf{n}_{\text{ор}}^T(k) = [n_7(k) \ n_8(k)]$ соответствует виду, приведенному в [13]. При этом величины спектральных плотностей возмущений в модели ОГ соответствуют значениям для рубидиевого стандарта частоты [11] и равны: $S_g \approx 7,9 \times 10^{-28} \text{ (с}^{-1}\text{)}$ $S_f \approx 10^{-20} \text{ (рад}^2\text{/Гц)}$. Случайные начальные условия $\mathbf{x}(0)$ имеют гауссовское распределение вероятностей с параметрами $\mathbf{M}[\mathbf{x}(0)] = \mathbf{m}_0$ и диагональной дисперсионной матрицей $\mathbf{V}_0 = \mathbf{M}\{[\mathbf{x}(0) - \mathbf{m}_0] \cdot [\mathbf{x}(0) - \mathbf{m}_0]^T\}$.

Поставленная задача относится к классу нелинейных задач динамической фильтрации и управления [6, 7] с аддитивными белыми гауссовскими шумами в модели непрерывных состояний и дис-

кретных наблюдений. Объектом управления является ОГ.

Известно [7], что оптимальный алгоритм обработки (в линейном приближении) предполагает формирование оптимальной линейной оценки состояния (при заданном управлении) с последующим вычислением оптимального управления $U_{\text{опт}}[\hat{x}_7(k), \hat{x}_8(k)]$ как функции оптимальных оценок состояния.

В данной работе управление не является оптимальным и формируется в ПИ-регуляторе, который содержит пропорциональную и интегральную компоненты. Этот вариант требует меньших вычислительных ресурсов. Значения $\delta U(k)$ управляющей последовательности в (3) формировались по следующему правилу:

$$\delta U(t_k) = \begin{cases} 0 & \text{для } \forall t_k \in ((k-1)T_0; kT_0), \\ K_7 \cdot (1/T_0) \sum_{t_k}^{t_k+T_0} \hat{x}_7(t_k) + K_8 \cdot (1/T_0) \times \\ \times \sum_{t_k}^{t_k+T_0} \hat{x}_8(t_k) & \text{для } t_k = kT_0, \end{cases} \quad (4)$$

где K_7, K_8 — весовые коэффициенты, определяющие вклад оценок $\hat{x}_7(k), \hat{x}_8(k)$ в управление; T_0 — время усреднения, в течение которого выполнялось сглаживание оценок.

Результаты моделирования

Вероятностные характеристики точности оценок $\hat{\mathbf{x}}(k)$ определены путем статистического усреднения по ансамблю из 200 независимых реализаций гауссовских шумов в модели состояний, наблюдений и случайным гауссовским начальным условиям $\mathbf{x}(0)$. Временной темп поступления данных в канале наблюдений 1 мс. КА располагался на высокоэллиптической орбите, геометрический фактор (GDOP) при приеме сигналов 4 НКА равен 40,7 и в течение часа изменялся незначительно.

Интенсивности дискретных шумов в наблюдениях $\sigma_{\Delta t}^2$ и σ_f^2 в пересчете на псевдодальность и псевдоскорость равны соответственно 0,32 м² и 0,009 м/с². Отметим, что указанные значения $\sigma_{\Delta t}^2$ и σ_f^2 достигаются в режиме слежения

за задержкой и фазой навигационного сигнала при отношении мощности навигационного сигнала к спектральной плотности белого шума $(C/N_0) = 35$ дБ-Гц в полосе 0,02 Гц. Интенсивности шумов в модели состояния по компонентам ускорения одинаковы и равны $\sqrt{D_g} = 10^{-5}$ м/с².

Параметры, определяющие приращение $\delta U(k)$ управляющей последовательности: $T_u = 1$ с; $q = 10^3$; $T_0 = 25$ с; $K_7 = 0,01$; $K_8 = 1$. Таким образом, временной темп обновления управления составлял 25 с.

Диагональные элементы $(\sqrt{V_0})_{ii}$, определяющие СКО начальных оценок $\hat{x}(0)$, равны: по координатам 10^5 м, по компонентам скорости 10^3 м/с, по смещению шкалы времени 10^{-4} с и по относительной частоте 10^{-7} . Начальные оценки: $\hat{x}_1(0) = 35\,061$ км, $\hat{x}_2(0) = 28\,118$ км, $\hat{x}_3(0) = 9711,4$ км, $\hat{x}_4(0) = 1,3$ м/с, $\hat{x}_5(0) = 928,4$ м/с, $\hat{x}_6(0) = -1224,8$ м/с, $\hat{x}_7(0) = 10^{-6}$ с, $\hat{x}_8(0) = 10^{-7}$.

На рис. 1 и 2 на интервале наблюдения 1 ч показаны несколько реализаций модуля ошибок текущих оценок положения КА и его скорости при приеме сигналов 4 НКА.

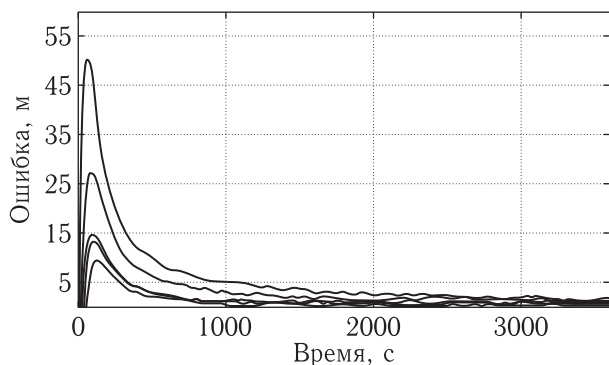


Рис. 1. Реализация модуля ошибок текущих оценок положения КА

При этом в конце интервала наблюдения среднеквадратические погрешности (СКП) по ансамблю реализаций равны: СКП положения КА — 0,55 м, СКП скорости — 0,002 м/с, СКП оценки смещения шкалы времени — 1,9 нс, СКП оценки смещения относительной частоты — $3 \cdot 10^{-13}$.

На рис. 3 и 4 приведены зависимости СКП модуля соответственно положения и скорости КА на интервале наблюдения $7 \cdot 10^3$ с. Расчет выполнен для случая пропадания сигналов одного

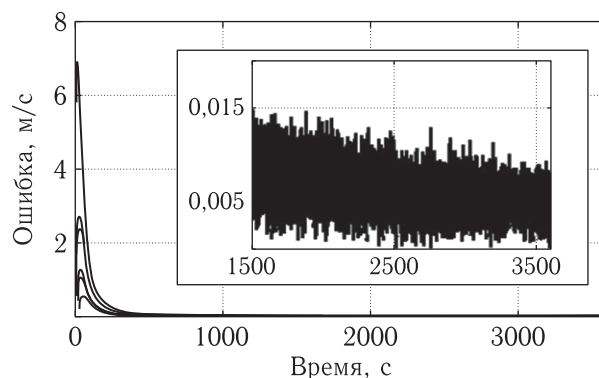


Рис. 2. Реализация модуля ошибок текущих оценок скорости КА

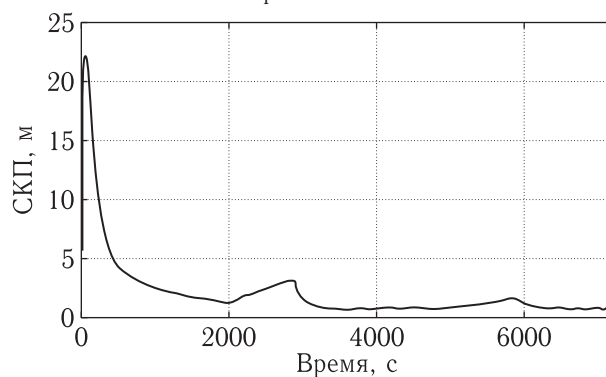


Рис. 3. Зависимость СКП модуля положения КА

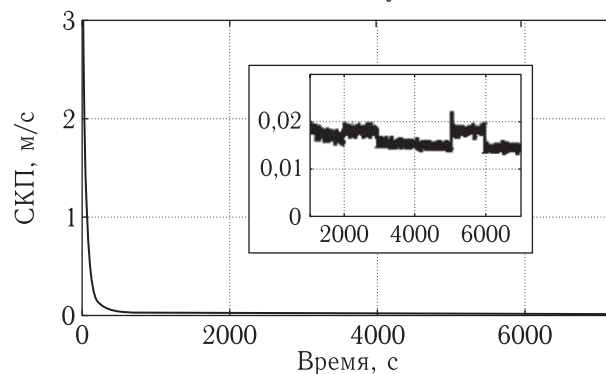


Рис. 4. Зависимость СКП модуля скорости КА

НКА на интервале времени от 2000 с до 2900 с и от 5000 с до 5900 с. На рис. 5 и 6 показаны одиночные реализации оценок $[c \cdot \hat{x}_7(k)]$ и $[c \cdot \hat{x}_8(k)]$ в замкнутом контуре управления.

Заключение

Полученные в работе результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. Применение сигма-точечного алгоритма фильтра Калмана в задаче координатного и час-

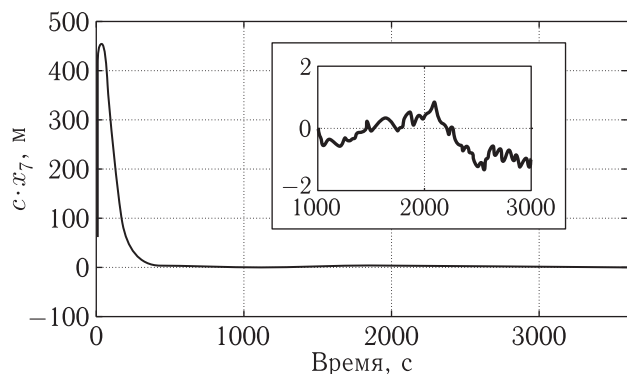


Рис. 5. Оценка $[c \cdot \hat{x}_7(k)]$ в замкнутом контуре управления

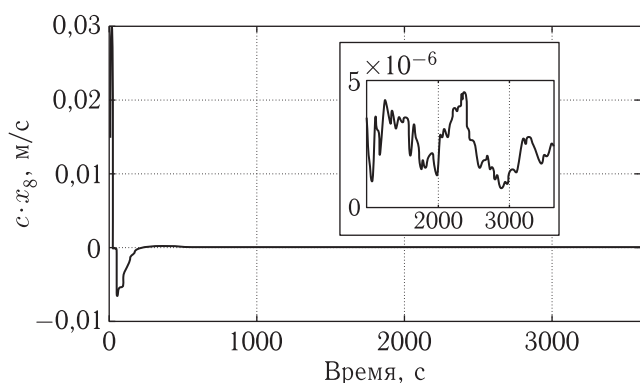


Рис. 6. Оценка $[c \cdot \hat{x}_8(k)]$ в замкнутом контуре управления

точно-временного обеспечения САН при движении КА на ВЭО с величиной GDOP 40,7 и $(C/N_0) = 35$ дБ-Гц в полосе 0,02 Гц приводит к величинам СКП оценок, равным: 0,55 м и 0,002 м/с, соответственно, по положению и скорости КА; 1,9 нс и $3 \cdot 10^{-13}$, соответственно, по смещению шкалы времени и относительной частоте бортового ОГ.

2. Изменение количества НКА с 4 до 3 на интервале до 15 мин в условиях рассмотренной задачи приводит к расходимости оценок положения с увеличением СКП положения КА до 1,5–2 раз с последующим восстановлением устойчивой работы алгоритма при появлении дополнительного НКА.

Работа выполнена в рамках проекта ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы», соглашение № 14.574.21.0101 (уникальный идентификатор RFMEFI57414X0101).

Список литературы

1. Михайлов Н.В. Автономная навигация космических аппаратов при помощи спутниковых радионавигационных систем. СПб.: Политехника, 2014. 362 с.
2. Moreau M.C. GPS receiver architecture for autonomous navigation in high Earth orbits. 2001. P. 207.
3. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования / Под ред. А.И. Перова, В.Н. Харисова. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Радиотехника, 2010. 800 с.
4. Simandl M. Lecture notes on state estimation of nonlinear non-Gaussian stochastic systems // Department of Cybernetics, Faculty of Applied Sciences, University of West Bohemia, Pilsen. 2006. 154 p.
5. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991. 608 с.
6. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении / Пер. с англ. под ред. Б.Р. Левина. М.: Связь, 1976. 496 с.
7. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление / Пер. с англ. под ред. А.С. Шаталова. М.: Энергия, 1973. 440 с.
8. Julier S.J., Uhlmann J.K. A New Approach for Filtering Nonlinear Systems // In Proc. of AeroSense: The 11th Intern. Symp. on Aerospace Defence Sensing, Simulation and Controls, Orlando FL, USA 1997.
9. Julier S.J. The Scaled Unscented Transformation // Proceedings of the American Control Conference, American Automatic Control Council, Evanston, IL. 2002. May. P. 1108–1114.
10. Van Der Merwe R., Wan E. Sigma-Point Kalman Filters for Probabilistic Inference in Dynamic State-Space Models // In Proceedings of the Workshop on Advances in Machine Learning. 2003.
11. Graas F., Craig S., Pelgrum W., Ugazio S. Laboratory and Flight Test Analysis of Rubidium Frequency Reference Performance // Navigation, 2013. V. 60, № 2. P. 123–131.
12. Filimonov V., Shavrin V., Tislenko V., Kravets A., Lebedev V., Shkolniy V. Coordinate and Time-Frequency Support of a Spacecraft Flight by Means of Autonomic Navigation Using Sigma-Point Kalman Filter Algorithm // Журнал Сибирского федерального университета. Серия Математика и Физика, 2015, т. 8, № 4. С. 385–393.
13. Brown R.G. and Hwang P.Y.C. Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering, 2nd Edition, Wiley, 1992. P. 502.