

К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Учебник

*5-е издание, стереотипное*

Под общей редакцией доктора экономических наук,  
профессора К.В. Балдина

*Рекомендовано Редакционно-издательским Советом  
Российской академии образования к использованию  
в качестве учебника*

Москва  
Издательство «ФЛИНТА»  
2021

УДК 519.2(075.8)

ББК 22.17я73

Б20

Главный редактор д-р псих. н., проф., акад. РАО *Д.И. Фельдштейн*  
Зам. главного редактора д-р псих. н., проф., акад. РАО *С.К. Бондырева*

Члены редакционной коллегии:

д-р псих. н., проф., акад. РАО *Ш.А. Амонашвили*; д-р пед. н., член-корр. РАО  
*В.А. Болотов*; д-р псих. н., проф., акад. РАО *А.А. Деркач*; д-р псих. н., проф.,  
акад. РАО *А.И. Донцов*; д-р псих. н., проф., акад. РАО *И.В. Дубровина*;  
д-р псих. н., проф. *В.П. Зинченко*; д-р филол. н., проф., акад. РАО  
*В.Г. Костомаров*; д-р пед. н., проф., акад. РАО *Н.Н. Малофеев*;  
д-р физ.-мат. н., проф., акад. РАО *В.Л. Матросов*; д-р пед. н., проф.,  
акад. РАО *Н.Д. Никандров*; д-р псих. н., проф., акад. РАО *В.В. Рубцов*;  
д-р пед. н., проф., акад. РАО *М.В. Рыжаков*; д-р ист. н., проф. *Э.В. Сайко*

### **Балдин К.В.**

Б20 Основы теории вероятностей и математической статистики  
[Электронный ресурс] : учебник / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков,  
А.В. Рукосуев. — 5-е изд., стер. — М. :  
ФЛИНТА, 2021. — 489 с.

ISBN 978-5-9765-2069-1

Учебник написан на базе лекционных курсов, прочитанных авторами в ряде вузов столицы. Рассмотрены все аспекты дисциплины «Основы теории вероятностей и математической статистики» Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования и учебных программ по направлениям бакалавриата «Менеджмент» и «Экономика». Учебник содержит два раздела «Основы теории вероятностей» и «Основы математической статистики». Включены вопросы для самоконтроля, примеры использования классических методов и заданий для самостоятельной работы обучающихся.

Для студентов, аспирантов и молодых преподавателей, а также для научных сотрудников, предпринимателей и менеджеров.

УДК 519.2(075.8)

ББК 22.17я73

ISBN 978-5-9765-2069-1

© Балдин К.В., Башлыков В.Н.,  
Рукосуев А.В., 2016

© Издательство «ФЛИНТА», 2016

## Оглавление

|   |           |
|---|-----------|
| Введение .....  | 8         |
| Раздел I. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ .....  | 15        |
| Глава 1. Случайные события .....  | 16        |
| 1.1. Предмет теории вероятностей .....  | 16        |
| 1.2. Основные понятия и определения .....   | 21        |
| 1.3. Частота и вероятность. Способы нахождения вероятностей случайных событий.....    | 27        |
| 1.3.1. Аксиоматическое построение теории вероятностей .....                           | 29        |
| 1.3.2. Классический способ определения вероятности.....                               | 30        |
| 1.4. Понятие условной вероятности. Стохастическая зависимость случайных событий ..... | 32        |
| 1.5. Правила действий с вероятностями .....   | 33        |
| 1.6. Повторение независимых испытаний. Схема Бернулли .....                           | 39        |
| 1.7. Формула полной вероятности.....  | 42        |
| 1.8. Формула Байеса .....   | 44        |
| <i>Вопросы для самопроверки .....</i>   | <i>47</i> |
| <i>Задачи для самостоятельного решения .....</i>                                      | <i>47</i> |
| Глава 2. Случайные величины .....   | 53        |
| 2.1. Случайные величины и их классификация.....                                       | 53        |
| 2.2. Закон распределения случайной величины и формы его представления .....           | 54        |
| 2.2.1. Понятие распределения случайной величины.....                                  | 54        |
| 2.2.2. Функция вероятности .....  | 56        |
| 2.2.3. Функция распределения .....  | 57        |
| 2.2.4. Плотность распределения.....   | 63        |
| 2.3. Числовые характеристики скалярных случайных величин .....                        | 66        |
| 2.3.1. Характеристики положения.....  | 66        |
| 2.3.2. Характеристики рассеивания .....   | 71        |
| 2.3.3. Моменты случайной величины .....   | 75        |
| 2.4. Основные теоретические распределения скалярных случайных величин .....           | 78        |
| 2.5. Распределение случайного вектора .....   | 91        |
| 2.6. Частные и условные распределения компонент случайного вектора.....               | 97        |

|  |            |
|--|------------|
| 2.6.1. Частные распределения .....   | 97         |
| 2.6.2. Условные распределения. Стохастическая<br>зависимость случайных величин ..... | 101        |
| 2.7. Числовые характеристики векторных случайных величин .....                       | 106        |
| 2.8. Нормальное распределение двумерного случайного вектора ...                      | 111        |
| <i>Вопросы для самопроверки .....</i>  | <i>115</i> |
| <i>Задачи для самостоятельного решения .....</i>                                     | <i>116</i> |
| <br>   |            |
| Глава 3. Функции случайных аргументов .....  | 122        |
| 3.1. Общая характеристика задач исследования функций<br>случайных аргументов .....   | 122        |
| 3.2. Теоремы о числовых характеристиках случайных величин .....                      | 123        |
| 3.3. Определение числовых характеристик функций<br>случайных аргументов .....        | 129        |
| 3.4. Распределение однозначного преобразования<br>случайных величин .....            | 138        |
| 3.5. Распределение неоднозначного преобразования<br>случайных величин .....          | 143        |
| 3.6. Распределение функции двух случайных величин .....                              | 145        |
| 3.7. Композиция распределений .....  | 147        |
| 3.7.1. Композиция нормального и равномерного<br>распределений .....                  | 147        |
| 3.7.2. Композиция нормальных распределений .....                                     | 150        |
| <i>Вопросы для самопроверки .....</i>  | <i>152</i> |
| <i>Задачи для самостоятельного решения .....</i>                                     | <i>153</i> |
| <br>   |            |
| Глава 4. Случайные процессы .....  | 157        |
| 4.1. Понятие случайного процесса. Классификация<br>случайных процессов .....         | 157        |
| 4.2. Вероятностные характеристики случайных функций .....                            | 162        |
| 4.3. Основные типы случайных процессов .....   | 172        |
| 4.4. Основное уравнение Маркова для марковских<br>случайных процессов .....          | 177        |
| 4.5. Дискретный марковский случайный процесс<br>с дискретным временем .....          | 180        |
| 4.6. Потоки событий .....  | 187        |
| 4.7. Дискретный марковский случайный процесс<br>с непрерывным временем .....         | 191        |
| 4.8. Процесс гибели и размножения .....  | 200        |
| 4.9. Системы массового обслуживания .....  | 202        |

|   |     |
|---|-----|
| 4.9.1. Система массового обслуживания с отказами .....  | 204 |
| 4.9.2. Система массового обслуживания с ожиданием ..... | 212 |
| <i>Вопросы для самопроверки</i> .....                   | 218 |
| <i>Задачи для самостоятельного решения</i> .....        | 220 |

## Раздел II. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ..... 223

|   |     |
|---|-----|
| Глава 5. Статистические методы оценивания характеристик<br>продукции .....                  | 224 |
| 5.1. Общая характеристика статистических методов<br>оценивания характеристик продукции..... | 224 |
| 5.2. Общая схема эксперимента .....   | 227 |
| 5.3. Сущность выборочного метода.....   | 229 |
| 5.4. Понятие о законе больших чисел и центральной<br>предельной теореме .....               | 235 |
| <i>Вопросы для самопроверки</i> .....   | 242 |
| <i>Задачи для самостоятельного решения</i> .....  | 243 |

|   |     |
|---|-----|
| Глава 6. Методы статистической обработки результатов<br>испытаний.....                            | 245 |
| 6.1. Постановка задачи оценивания вероятностных<br>характеристик случайных величин .....          | 245 |
| 6.2. Основные требования к оценкам .....  | 246 |
| 6.3. Оценивание законов распределения случайных величин .....                                     | 250 |
| 6.4. Точечное оценивание числовых характеристик<br>случайных переменных .....                     | 257 |
| 6.4.1. Оценивание вероятности наступления<br>случайного события .....                             | 257 |
| 6.4.2. Оценивание математического ожидания<br>случайной величины.....                             | 259 |
| 6.4.3. Оценивание дисперсии и стандартного<br>отклонения случайной величины .....                 | 263 |
| 6.4.4. Определение числовых характеристик случайных<br>величин при большом объеме измерений ..... | 265 |
| 6.5. Интервальное оценивание числовых характеристик<br>случайных переменных .....                 | 265 |
| 6.5.1. Понятие доверительной вероятности<br>и доверительного интервала .....                      | 265 |

|  |            |
|--|------------|
| 6.5.2. Оценивание вероятности наступления<br>случайного события .....                        | 270        |
| 6.5.3. Оценивание математического ожидания .....   | 274        |
| 6.5.4. Оценивание стандартного отклонения .....  | 280        |
| <i>Вопросы для самопроверки .....</i>  | <i>285</i> |
| <i>Задачи для самостоятельного решения .....</i>   | <i>286</i> |
| <b>Глава 7. Статистическая проверка гипотез.....</b>   | <b>290</b> |
| 7.1. Сущность проверки статистических гипотез .....  | 290        |
| 7.2. Методы проверки гипотез о законах распределения.....                                    | 298        |
| 7.2.1. Постановка задачи .....   | 298        |
| 7.2.2. Проверка гипотез о законе распределения .....   | 301        |
| 7.3. Методы проверки гипотез о параметрах законов<br>распределения.....                      | 310        |
| 7.3.1. Проверка гипотез о равенстве математических<br>ожиданий.....                          | 310        |
| 7.3.2. Проверка гипотез о равенстве дисперсий .....  | 316        |
| 7.4. Проверка гипотез методом последовательного анализа.....                                 | 322        |
| 7.4.1. Сущность метода последовательного анализа .....                                       | 322        |
| 7.4.2. Проверка гипотезы о вероятности наступления<br>случайного события .....               | 325        |
| 7.4.3. Проверка гипотезы о математическом ожидании .....                                     | 327        |
| <i>Вопросы для самопроверки .....</i>  | <i>329</i> |
| <i>Задачи для самостоятельного решения .....</i>   | <i>330</i> |
| <b>Глава 8. Методы статистического анализа результатов испытаний .....</b>                   | <b>334</b> |
| 8.1. Общая характеристика методов статистического<br>анализа результатов испытаний .....     | 334        |
| 8.2. Основы дисперсионного анализа .....   | 336        |
| 8.2.1. Сущность дисперсионного анализа.....  | 336        |
| 8.2.2. Однофакторный дисперсионный анализ.....   | 338        |
| 8.2.3. Проверка существенности влияния фактора<br>в однофакторном дисперсионном анализе..... | 343        |
| 8.2.4. Выявление уровня фактора, влияющего<br>на результаты испытаний .....                  | 347        |
| 8.2.5. Примеры однофакторного дисперсионного анализа .....                                   | 350        |
| 8.2.6. Особенности проведения двухфакторного<br>дисперсионного анализа .....                 | 354        |
| <i>Вопросы для самопроверки .....</i>  | <i>359</i> |
| <i>Задачи для самостоятельного решения .....</i>   | <i>360</i> |

|  |            |
|--|------------|
| Глава 9. Основы регрессионного анализа.....                              | 362        |
| 9.1. Сущность регрессионного анализа.....                                | 362        |
| 9.2. Задача регрессионного анализа .....                                 | 365        |
| 9.3. Метод наименьших квадратов .....                                    | 367        |
| 9.4. Предпосылки регрессионного анализа .....                            | 375        |
| 9.5. Статистический анализ уравнения регрессии.....                      | 377        |
| 9.6. Спецификация регрессионной модели .....                             | 405        |
| 9.7. Регрессионные модели с гетероскедастичными остатками .....          | 409        |
| 9.8. Метод взвешенных наименьших квадратов (МВНК).....                   | 419        |
| 9.9. Нелинейные регрессионные модели и их линеаризация .....             | 423        |
| 9.10. Оценки коэффициентов нелинейных регрессионных<br>моделей .....     | 432        |
| 9.10.1. Оценки коэффициентов параболы второго порядка....                | 432        |
| 9.10.2. Определение коэффициентов функций,<br>отличных от полинома ..... | 433        |
| <i>Вопросы для самопроверки .....</i>                                    | <i>435</i> |
| <i>Задачи для самостоятельного решения .....</i>                         | <i>436</i> |
| <br>   |            |
| Глава 10. Основы корреляционного анализа .....                           | 439        |
| 10.1. Сущность корреляционного анализа.....                              | 439        |
| 10.2. Классификация методов корреляционного анализа .....                | 441        |
| 10.3. Однофакторный корреляционный анализ.....                           | 441        |
| 10.4. Анализ тесноты связи.....  | 446        |
| 10.5. Многофакторный корреляционный анализ.....                          | 448        |
| 10.6. Автокорреляция.....  | 454        |
| <i>Вопросы для самопроверки .....</i>                                    | <i>457</i> |
| <i>Задачи для самостоятельного решения .....</i>                         | <i>457</i> |
| <br>   |            |
| Литература.....  | 460        |
| <br>   |            |
| Приложение .....   | 462        |