

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова

А. М. ЛУКАЦКИЙ

СТРУКТУРНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГРУПП ЛИ
В ПРИМЕНЕНИИ К УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Ярославль 2010

УДК 517.958

ББК В148

Л84

*Рекомендовано
редакционно-издательским советом ЯрГУ
в качестве научного издания. План 2009/2010 года*

Научный редактор

д-р физ.-мат. наук, проф. А. Л. Онищик

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, проф. Р. И. Богданов;

кафедра алгебры и математической логики

Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

Лукацкий, А. М. Структурно-геометрические свойства бесконечномерных групп Ли в применении к уравнениям математической физики: монография / А. М. Лукацкий; Яросл. гос. ун-т. им. П. Г. Демидова. – Ярославль. ЯрГУ, 2010. – 174 с.

Л84

ISBN 978-5-8397-0722-1

Монография посвящена исследованию нелинейных уравнений математической физики методами теории бесконечномерных групп Ли. Рассматриваются вопросы реализации конфигурационного пространства физической задачи в виде бесконечномерной группы Ли. В качестве ключевого метода исследования уравнений математической физики предлагается использовать геометрические инварианты бесконечномерных групп Ли.

Результаты монографии могут быть полезны математикам, специализирующимся в области бесконечномерных групп Ли и бесконечномерного анализа, а также механикам и физикам, специализирующимся по динамике сплошных сред. Ее могут использовать в своей работе студенты старших курсов и аспиранты математических факультетов университетов, специалисты из МИАН, ИПМ и т. п.

Издание осуществлено при поддержке РФФИ, проект 07-01-00230.

Библиогр.: 131 назв.

УДК 517.958

ББК В148

ISBN 978-5-8397-0722-1

©Ярославский государственный
университет им. П. Г. Демидова, 2010

Оглавление

Введение.....	5
1. <i>Общая характеристика работы</i>	<i>5</i>
2. <i>Обзор содержания монографии.....</i>	<i>7</i>
Глава 1. Структурные свойства бесконечномерных групп Ли.....	21
Обзор содержания главы.....	21
1.1. <i>Бесконечномерные гладкие многообразия. Основные понятия и геометрические структуры</i>	<i>23</i>
1.2. <i>Бесконечномерные группы Ли. Основные понятия. Примеры бесконечномерных групп Ли</i>	<i>27</i>
1.3. <i>Группы токов и их обобщения.....</i>	<i>39</i>
1.4. <i>Топологическая конечнопорожденность бесконечномерных групп Ли.....</i>	<i>52</i>
1.5. <i>Достаточные условия продолжения геодезических на бесконечность во времени. Формулы для кривизн бесконечномерных групп Ли</i>	<i>62</i>
Глава 2. Геометрия групп диффеоморфизмов.....	72
Обзор содержания главы.....	72
2.1 <i>Исследование пассатного потока на двумерной сфере.....</i>	<i>74</i>
2.2. <i>Разбор случая тора \mathbb{T}^n</i>	<i>81</i>
2.3 <i>Вычисление кривизны Риччи для группы $\text{Diff}_\mu(\mathbb{T}^n)$</i>	<i>92</i>
2.4 <i>Разбор случаев компактных римановых поверхностей.....</i>	<i>95</i>
2.5. <i>Исследование геометрии группы диффеоморфизмов, сохраняющих меру некомпактного многообразия.....</i>	<i>103</i>
2.6. <i>Вычисление кривизн группы $\text{Diff}_\mu^0(M)$ для некомпактного M в общем случае.....</i>	<i>109</i>
Глава 3. Геометрия групп токов. Приложения к исследованию нелинейной динамики намагниченности ферромагнетиков, описываемой уравнением Ландау – Лифшица.....	117
Обзор содержания главы.....	117
3.1. <i>Вывод формулы тензора кривизны группы токов</i>	<i>118</i>
3.2. <i>Вычисление секционных кривизн для группы токов на трехмерном торе.....</i>	<i>123</i>
3.3. <i>Обобщение конструкций на случай риманова многообразия.....</i>	<i>126</i>
Глава 4. Групповой подход к исследованию динамики	

жидкости, описываемой уравнениями Эйлера	
и Навье – Стокса.....	129
<i>Обзор содержания главы.....</i>	<i>129</i>
4.1. <i>Случай идеальной несжимаемой жидкости.....</i>	<i>130</i>
4.2. <i>Случай вязкой несжимаемой жидкости.....</i>	<i>135</i>
4.3. <i>Связь конструкций с теорией поля.....</i>	<i>137</i>
Глава 5. Анализ интегральных инвариантов сплошной	
среды	140
<i>Обзор содержания главы.....</i>	<i>140</i>
5.1. <i>Постановка задачи.....</i>	<i>140</i>
5.2. <i>Случай идеальной сжимаемой жидкости.....</i>	<i>141</i>
5.3. <i>Случай идеальной несжимаемой жидкости</i>	<i>143</i>
5.4. <i>Случай вязкой несжимаемой жидкости</i>	<i>147</i>
5.5. <i>Заключение.....</i>	<i>147</i>
Глава 6. Исследование геодезического потока на	
бесконечномерной группе Ли с использованием оператора	
коприсоединенного действия.....	149
<i>Обзор содержания главы.....</i>	<i>149</i>
6.1. <i>Постановка задачи.....</i>	<i>149</i>
6.2. <i>Свойства ограниченности производных коэффициентов</i>	
<i>решений уравнений Эйлера</i>	
<i>на определенных типах бесконечномерных групп Ли.</i>	<i>149</i>
6.3. <i>Связь с уравнением Навье – Стокса.....</i>	<i>154</i>
6.4. <i>Анализ поведения решений уравнений Эйлера</i>	
<i>в особой точке.....</i>	<i>155</i>
6.5. <i>Анализ поведения решений уравнений Навье – Стокса</i>	
<i>в особой точке.....</i>	<i>156</i>
6.6. <i>Случай n-мерного тора.....</i>	<i>157</i>
6.7. <i>Выводы.....</i>	<i>161</i>
Замечания.....	163
 Литература.....	 164

ВВЕДЕНИЕ

1. *Общая характеристика работы*

Развитие теории уравнений математической физики, а также приемов и методов построения их решений, анализа свойств известных решений насчитывает богатую историю. Законы динамики Ньютона, теория статических электрических полей, развитая Максвеллом до теории электромагнитного поля, теория теплопроводности, развитая в трудах Фурье, а затем доведенная в работах Планка, Фоккера, Колмогорова до теории стохастической диффузии и, наконец, уравнение Шредингера в квантовой механике, формализм Гейзенберга, вторичное квантование по Фоку, – вот далеко не полный перечень этапов этой истории.

Бурный прогресс наукоемких высоких технологий последней четверти XX столетия, обусловленный указанным выше развитием, настоятельно требует разработки на первый взгляд противоречивых направлений: повышение производительности и миниатюризация информационных технологий требуют рассмотрения быстрых (на сегодня порядка 10^{-13} – 10^{-15} сек.) переходных процессов и разреженных ансамблей частиц (порядка 10^{11} – 10^{13} электронов); наряду с этим задачи макроэкологии, космологии требуют прогнозов антропоморфных процессов на периодах от 1 до 10^6 лет и выше. Таким образом, обнаруживается необходимость предъявления принципиально новых решений в области уравнений математической физики, позволяющих описывать и предсказывать феномены в указанных выше проблемах.

Существует практически необозримое количество публикаций, описывающих с принципиальной точки зрения все известные на сегодня физические процессы и посвященных построению и исследованию их решений, а также описанию экспериментальных данных на их основе. В списке уравнений математической физики особое место занимают нелинейные гидродинамические уравнения Навье – Стокса, кинетические уравнения Больцмана [Бол], [КЗ] и т. д. Здесь в качестве примера основополагающей публикации можно привести известную в математической литературе работу Колмогорова – Петровского – Пискунова [КПП], в которой было предложено на основе автомодельных решений уравнения стохастической диффузии анализировать явление распространения инфекции в подходящей питательной среде.

Анализ соответствующей литературы показывает, что основным методом исследования нелинейных дифференциальных уравнений на сегодня