КЪ ВОПРОСУ О ЧИСЛѢ ПОЛОЖЕНІЙ РАВНОВѢСІЯ ПЛАВАЮЩЕЙ ПРЯМОЙ ТРЕХЪ-ГРАННОЙ ПРИЗМЫ.

Ѳ. А. Слудскаго.

(Читано 15 января 1877 года).

Два года тому назадъ я имѣлъ честь представить Математическому Обществу маленькое изслѣдованіе по вопросу о числѣ положеній равновѣсія плавающей прямой трехъгранной призмы (Математическій Сборникъ, томъ VII). Я показалъ тогда, что при рѣшеніи этого вопроса нужно отдать предпочтеніе методу геометрическому предъ аналитическимъ. Пользуясь геометрическимъ методомъ, я доказалъ теорему А. Ю. Давидова о наибольшемъ числѣ положеній равновѣсія призмы и вывелъ нѣкоторыя новыя теоремы.— Теперь я намѣренъ обратить вниманіе Общества на трудъ студента нашего университета Ѳ. С. Сигова, представляющій собою весьма существенное дополненіе къ этому моему изслѣдованію.

Г. Сиговъ доказалъ:

1) Что призма, основаніемъ которой служитъ прямоугольный, или тупоугольный треугольникъ, не можетъ имѣть болѣе шести положеній равновѣсія.

2) Что число положеній равновѣсія призмы, имѣющей основаніемъ остроугольный треугольникъ, не превосходитъ восьми, если удовлетворяется одно изъ неравенствъ:

$$
\begin{aligned}
&cos A \leqq cos\ B\ cos\ C, \\
&sin C \leqq sin\ A\ sin\ B,
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

и не превосходитъ шести, если удовлетворяются оба эти неравенства.

Онъ обнаружилъ, что покрайней мѣрѣ одно изъ неравенствъ (1) удовлетворяется, если $A \geqq 70^\circ 36'$.

Я приведу доказательства г. Сигова, но позволю себѣ при этомъ, для большей ясности и краткости, измѣнить нѣсколько его редакцію.

1.—Положимъ, что основаніемъ призмы служитъ остроугольный треугольникъ ABC (фиг. 1).

$$A \geqq B \geqq C.$$

Опустимъ изъ вершинъ треугольника перпендикуляры на противуположныя стороны. Означимъ подножія перпендикуляровъ чрезъ D, E и F.

Означимъ отношенія площадей треугольниковъ ABE, ACD и ABF къ площади треугольника ABC чрезъ p_1, p_2 и p_3. Замѣтимъ, что дроби p_1, p_2 и p_3—не больше половины и что

$$p_1 \leqq p_2\ ;\ p_1 \leqq p_3.$$

Опустимъ изъ средины стороны a, точки G, перпендикуляры GH и GK на стороны c и b. Опишемъ изъ G окружность радіусомъ GH и означимъ чрезъ L и M точки пересѣченія этой окружности со стороною b. Соединимъ L и M съ G и H прямыми линіями.

Припомнимъ (Мат. Сб., томъ VII, стр. 496 и слѣд.), что при погруженіи угла A:

1) Нижнія линіи плаванія отсѣкаютъ площади, постепенно уменьшающіяся отъ AHL до нуля.

2) Верхнія линіи плаванія отсѣкаютъ площади, постепенно увеличивающіяся отъ AHM до ABC.

3) Правыя боковыя линіи плаванія отсѣкаютъ площади, постепенно уменьшающіяся отъ AHM до ACD.

4) Лѣвыя боковыя линіи плаванія отсѣкаютъ площади, сперва возрастающія отъ AHL до нѣкоторой наибольшей, а потомъ уменьшающіяся до ABE.

Означивъ отношеніе наибольшей изъ площадей, отсѣкаемыхъ лѣвыми боковыми линіями плаванія, къ площади ABC чрезъ p_4, и сообразивъ все сказанное сейчасъ, заключимъ:

При погруженіи угла A призма не будетъ имѣть ни одного положенія равновѣсія, если плотность ея ρ не будетъ содержаться ни въ одномъ изъ трехъ промежутковъ: отъ нуля до p_4, отъ p_1 до p_4 и отъ p_2 до единицы. Содержанію ρ въ каждомъ изъ этихъ промежутковъ соотвѣтствуетъ свое особое положеніе равновѣсія *).

Выводъ этотъ представленъ графически на фигурѣ 2 въ столбцѣ I. Число положеній равновѣсія при данной плотности ρ равняется числу точекъ кривой, имѣющихъ данную ординату ρ. Пунктиромъ обозначены варіэтеты кривой, соотвѣтствующіе различнымъ величинамъ p_4.

Переходя къ случаю погруженія угловъ B и C, заключаемъ.

Призма не будетъ имѣть ни одного положенія равновѣсія, если $(1-\rho)$ не заключается ни въ одномъ изъ помянутыхъ выше трехъ промежутковъ. Содержанію $(1-\rho)$ въ каждомъ изъ этихъ промежутковъ соотвѣтствуетъ свое особое положеніе равновѣсія.

Въ столбцѣ II фигуры 2 выводъ этотъ представленъ графически.

Отъ случая погруженія угла A легко перейти къ случаямъ погруженія угла B и угла C. Стоитъ замѣтить, что

при погруженіи угла B:

1) Роль лѣвыхъ боковыхъ линій плаванія будутъ играть правыя и на оборотъ.

при погруженіи угла C:

1) Роль p_1 будетъ играть $1-p_3$; роль p_2 будетъ играть $1-p_1$.

*) При $\rho=p_4$ существуетъ одно положеніе равновѣсія, если $p_4<p_2$, и два, если $p_4 \geqq p_2$.