ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО ВГУ)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

по курсу **«Теория вероятностей и математическая статистика»**

для студентов 2 курса экономического факультета по направлениям «Экономика» и «Экономическая безопасность»

Воронеж 2015

ђqdqаеץ bƎ dеqƎbүзе d еаоqоү ɟqdqүqуè

СОДЕРЖАНИЕ

Пример 4. По самолету производится три одиночных выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,4, при втором – 0,5, при третьем – 0,7. Для выхода самолета из строя заведомо достаточно трех попаданий; при одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью 0,2, при двух попаданиях - с вероятностью 0,6.

1) Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов самолет будет выведен из строя.

2) Известно, что самолет выведен из строя, найти вероятность, что в него попало три снаряда.

Решение: Пусть событие A - самолет выведен из строя. Рассмотрим четыре гипотезы:

B_0 - в самолет не попало ни одного снаряда,

$$P(B_0)=(1-0{,}4)(1-0{,}5)(1-0{,}7)=0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3=0{,}09.$$

B_1 - в самолет попал один снаряд,

$$P(B_1)=0{,}4(1-0{,}5)(1-0{,}7)+(1-0{,}4)0{,}5(1-0{,}7)+(1-0{,}4)(1-0{,}5)0{,}7=0{,}36.$$

B_2 - в самолет попало два снаряда,

$$P(B_2)=(1-0{,}4)\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7+0{,}4\cdot(1-0{,}5)\cdot 0{,}7+0{,}4\cdot 0{,}5\cdot(1-0{,}7)=0{,}41.$$

B_3 - в самолет попало три снаряда,

$$P(B_3)=0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7=0{,}14.$$

Контрольная формула:

$$P(B_0)+P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)=0{,}09+0{,}36+0{,}41+0{,}14=1.$$

$P_{B_0}(A)$- вероятность выхода самолета из строя при осуществлении гипотезы B_0, $P_{B_0}(A)=0$.

$P_{B_1}(A)$- вероятность выхода самолета из строя при осуществлении гипотезы B_1, $P_{B_1}(A)=0{,}2$.

$P_{B_2}(A)$- вероятность выхода самолета из строя при осуществлении гипотезы B_2, $P_{B_2}(A)=0{,}6$.

$P_{B_3}(A)$- вероятность выхода самолета из строя при осуществлении гипотезы B_3, $P_{B_3}(A)=1$.

1) Применяя формулу полной вероятности, получим:

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B_0)P_{B_0}(A)+P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+P(B_3)P_{B_3}(A)=\\&=0{,}36\cdot 0{,}2+0{,}41\cdot 0{,}6+0{,}14\cdot 1=0{,}458\end{aligned}.$$

2) По формуле Байеса вычислим условные вероятности событий (гипотез).

$$P_A\left(B_3\right)=\frac{P\left(B_3\right)P_{B_3}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}14\cdot 1}{0{,}458}=0{,}306\,.$$

Пример 5. В каждом из 6 независимых испытаний событие А происходит с постоянной вероятностью 0,3. Вычислить все вероятности $p_k, k=0,1,\ldots,6$, где k – частота события А. Найти наивероятнейшую частоту.

Решение: Используем формулу Бернулли $p_n^k=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ и формулу, с помощью которой p_n^k вычисляются по значению p_n^{k-1}:

$p_n^k=\dfrac{n-k+1}{k}\cdot\dfrac{p}{1-p}\cdot p_n^{k-1}, k=1,2,\ldots,n\,.$ Вычислим значение

$p_n^0=p_6^0=C_6^0\left(0{,}3\right)^0(0{,}7)^6=(0{,}7)^6=0{,}117649.$

Тогда $p_6^1=\dfrac{6-1+1}{1}\cdot\dfrac{0{,}3}{0{,}7}\cdot 0{,}117649=0{,}302526.$ Аналогично вычисляем все остальные значения. Результаты занесем в таблицу.

p_6^0	0,117649
p_6^1	0,302526
p_6^2	0,324135
p_6^3	0,18522
p_6^4	0,059535
p_6^5	0,010206
p_6^6	0,000729
Контроль $\sum p_n^i=1$	1

Найдём наивероятнейшую частоту по заданным условиям:

$np-q\le k\le np+p,$

$$6\cdot 0{,}3-0{,}7\le k\le 6\cdot 0{,}3+0{,}3,$$

$$1{,}1\le k\le 2{,}1.$$

Значит, наивероятнейшая частота $k=2$ и значение $p_6^2=\dfrac{6-2+1}{2}\cdot\dfrac{0{,}3}{0{,}7}\cdot 0{,}302526=0{,}324135$ является максимальным.

Пример 6. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,3. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах цель будет поражена 30 раз.

Решение: При решении этой задачи используем локальную теорему Муавра-Лапласа: если при n независимых испытаниях событие A происходит с постоянной вероятностью p, которая не очень близка к нулю и единице, то при достаточно большом числе испытаний n вероятность того, что событие произойдет ровно m раз, приближенно равна

$$P_n(m) \approx \frac{f(x)}{\sqrt{npq}}, \text{ где } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \; x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

Функция $f(x)$ чётная и принимает только неотрицательные значения.

Так как $p = 0{,}3$, $q = 0{,}7$, $n = 100$, $m = 30$, то получим:

$$x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{30 - 100 \cdot 0{,}3}{\sqrt{100 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7}} = 0.$$

Отсюда имеем:

$$P_{100}(30) \approx \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^0 = \frac{1}{\sqrt{42\pi}} \cong 0{,}083.$$

Пример 7. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна $p = 0{,}2$. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

Решение: По условию $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$, $n = 400$, $k_1 = 70$, $k_2 = 100$. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа: если при n независимых испытаниях событие A происходит с постоянной вероятностью p, которая не очень близка к нулю и единице, то при достаточно большом числе испытаний n вероятность того, что частота m появления события A находится в интервале $m_1 \le m \le m_2$, приближенно равна

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

$$\text{где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \; x' = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \; x'' = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функция Ф(x) принимает значения в интервале $[0,1]$, является нечётной $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. В приложении 4 приведены значения интеграла лишь до x=5, так как для x>5 можно принять Ф(0)=0,5.

По условию $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$, $n = 400$, $m_1 = 70$, $m_2 = 100$.

$$P_{400}(70) \approx \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Найдем

$$x' = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -1{,}25,$$

$$x'' = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 2{,}5.$$

Таким образом, получим:

$$P_{400}(70) \approx \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25) =$$

$$= 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

Пример 8. Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит 5 бракованных книг.

Решение: По условию $p = 0{,}0001$, $a = np = 100000 \cdot 0{,}0001 = 10$, $m = 5$. Так как вероятность события мала используем формулу Пуассона $P_n(k) \approx \dfrac{a^m \cdot e^{-m}}{m!}$.

По асимптотической формуле Пуассона искомая вероятность приближенно равна:

$$P_{100000}(5) = \frac{10^5 \cdot e^{-10}}{5!} \cong 0{,}0375.$$

Пример 9. Дан ряд распределения случайной величины *X*:

x_i	1	3	5	7	9
p_i	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

Найти функцию распределения F(x). Вычислить для X её математическое ожидание, дисперсию и моду.

Решение:

Функцию распределения находим по формуле $F(x) = \sum\limits_{x_i < x} p_i$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0{,}1, & 1 < x \le 3, \\ 0{,}5, & 3 < x \le 5, \\ 0{,}7, & 5 < x \le 7, \\ 0{,}9, & 7 < x \le 9, \\ 1, & x > 9. \end{cases}$$

Математическое ожидание вычислим по формуле:

$$m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = 1 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}2 + 7 \cdot 0{,}2 + 9 \cdot 0{,}1 = 4{,}6.$$

Для нахождения дисперсии воспользуемся формулами:

$$d_x = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m_x\right)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(m_x\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = 1 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}4 + 25 \cdot 0{,}2 + 49 \cdot 0{,}2 + 81 \cdot 0{,}1 = 26{,}6 .$$

Дисперсия случайной величины:

$$D_x = 26{,}6 - (4{,}6)^2 = 5{,}44 ,$$

откуда легко определить среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma_x = \sqrt{5{,}44} = 2{,}33 .$$

Моду M_0 найдём по максимальной вероятности $M_0 = 3$.

Пример 10. Задана плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X . Требуется:

1. Определить коэффициент A;
2. Найти функцию распределения $F(x)$;
3. Найти математическое ожидание и дисперсию X ;
4. Найти вероятность того, что X примет значение из интервала (α, β).

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 2 \\ A(x+1) \text{ при } 2 \le x \le 4 \\ 0 \text{ при } x > 4 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \alpha = 3; \\ \beta = 3{,}5. \end{array}$$

Решение:

1. Для определения коэффициента A воспользуемся свойством нормированности плотности распределения: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{2} 0 \cdot dx + \int\limits_{2}^{4} A(x+1)dx + \int\limits_{4}^{+\infty} 0 \cdot dx = A \cdot \int\limits_{2}^{4} (x+1)dx = A\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_2^4 = 8A,$$

т.е. $8A = 1$, отсюда $A = 1/8$. Таким образом,

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ \textit{при} \ x < 2 \\ \dfrac{1}{8}(x+1) \ \textit{при} \ 2 \le x \le 4 \\ 0 \ \textit{при} \ x > 4. \end{cases}$$

2. Для нахождения функции распределения используем формулу

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$