

А  
Пролетарии всех стран, соединяйтесь!

634.9

У. 53-46

НАРОДНЫЙ КОМИССАРИАТ  
ЛЕСНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

# Труды лесотехнической академии им. С. М. Кирова № 46

Проверено  
48

Mitteilungen  
der forsttechnischen  
Akademie

ГОСЛЕСТЕХИЗДАТ  
ЛЕНИНГРАД

А  
1936

# К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ДЕРЕВЯННОЙ СВЕРЛЕННОЙ ТРУБЕ, ПОДВЕРЖЕННОЙ ДЕЙСТВИЮ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

При определении напряжений в толстостенных трубках, подвергающихся действию внутреннего и наружного давлений, обычно пользуются известным решением Ламе.<sup>1</sup> Решение это, однако справедливо лишь для случая трубы, выполненной из материала, обладающего одинаковыми упругими свойствами во всех направлениях.

Перед Ленинградским отделением института механической обработки древесины при выполнении работы по исследованию физико-механических свойств деревянных сверленных труб<sup>2</sup> встал вопрос о методе расчета последних.

Ниже приводится решение этой задачи, аналогичное решению Ламе,<sup>3</sup> но с учетом разных значений модуля упругости и числа Пуассона при определении деформаций в радиальном и тангенциальном направлениях. Пользуясь обозначениями, приведенными на рис. 1, и обозначив модуль нормальной упругости и Пуассоновое отношение, соответствующие деформациям от действия радиальных напряжений  $\sigma_r$  через  $E_1$  и  $\mu_1$ , а деформациям от тангенциальных напряжений  $\sigma_t$  через  $E_2$  и  $\mu_2$ , имеем следующую зависимость между деформациями и напряжениями:

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E_2} - \mu_2 \frac{\sigma_r}{E_1}$$

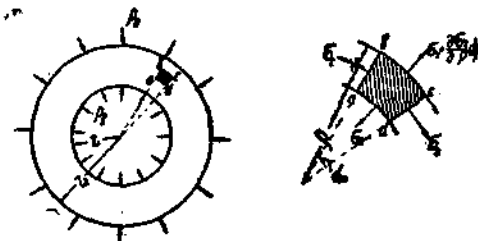


Рис. 1.

<sup>1</sup> Lamé. Leçons sur la théorie de l'élasticité. Paris. 1852.

<sup>2</sup> Работа выполнялась инж. К. К. Пичахи под руководством проф. Д. Ф. Шапова, который и предложил мне решить настоящую задачу.

<sup>3</sup> С. П. Тимошенко. Курс сопротивления материалов, изд. 1911—1932 гг. § 135.

откуда

$$\epsilon_r = \frac{\sigma_r}{E_1} - \mu_2 \frac{\sigma_t}{E_2},$$

$$\sigma_t = \frac{E_2}{1 - \mu_1 \mu_2} \cdot (\epsilon_t + \mu_1 \epsilon_r)$$

$$\sigma_r = \frac{E_1}{1 - \mu_1 \mu_2} \cdot (\epsilon_r + \mu_2 \epsilon_t).$$

Если  $u$  — радиальное перемещение какой-либо точки, находящейся в расстоянии  $\rho$  от центра, то, как известно:<sup>1</sup>

$$\epsilon_t = \frac{u}{\rho}, \text{ а } \epsilon_r = \frac{du}{d\rho};$$

тогда

$$\sigma_t = \frac{E_2}{1 - \mu_1 \mu_2} \cdot \left( \frac{u}{\rho} + \mu_1 \frac{du}{d\rho} \right),$$

$$\sigma_r = \frac{E_1}{1 - \mu_1 \mu_2} \cdot \left( \frac{du}{d\rho} + \mu_2 \frac{u}{\rho} \right) \quad (1)$$

Уравнение равновесия элемента  $abcd$  получим, проектируя все силы на направление радиуса, в следующем виде:

$$\sigma_r + \rho \frac{d\sigma_r}{d\rho} - \sigma_t = 0$$

или, подставляя значения напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_t$ :

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} + \left(1 + \mu_2 - \frac{E_2}{E_1} \mu_1\right) \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{du}{d\rho} - \frac{E_2}{E_1} \frac{u}{\rho^2} = 0.$$

Обозначая для краткости  $\left(1 + \mu_2 - \frac{E_2}{E_1} \mu_1\right)$  через  $A$ , а  $\frac{E_2}{E_1}$  через  $B$ , имеем:

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{A}{\rho} \frac{du}{d\rho} - B \frac{u}{\rho^2} = 0. \quad (2)$$

Положив  $t = \ln \rho$ , имеем:

$$\rho = e^t$$

$$\frac{dt}{d\rho} = \frac{1}{\rho}; \quad \frac{d\rho}{dt} = \rho;$$

$$\frac{du}{d\rho} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{du}{dt}$$

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{du}{d\rho} \right) \cdot \frac{dt}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \left( \frac{du}{dt} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\rho} \frac{du}{dt} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{d^2 u}{dt^2} \cdot \rho - \frac{du}{dt} \cdot \frac{d\rho}{dt} =$$

$$= \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{du}{dt} \right).$$

Подставляя эти значения в ур-ние (2), имеем

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + (A-1) \frac{du}{dt} - Bu = 0$$

<sup>1</sup> См. там же

или, заменяя  $(A-1) = \left(\mu_2 - \frac{E_2}{E_1} \mu_1\right)$  через  $D$ :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + D \frac{du}{dt} - Bu = 0 \quad (3)$$

Решение этого линейного дифференциального уравнения не представляет уже трудностей; корни характеристического уравнения:

$$k_{1,2} = \frac{1}{2} [-D \pm \sqrt{D^2 + 4B}] = \frac{1}{2} \left[ \left( \mu_2 - \frac{E_2}{E_1} \mu_1 \right) \pm \sqrt{\left( \mu_2 - \mu_1 \frac{E_2}{E_1} \right)^2 + 4 \frac{E_2}{E_1}} \right]$$

Общий интеграл ур-ния (3):

$$u = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t},$$

или подставляя  $t = \ln \rho$

$$u = C_1 \rho^{k_1} + C_2 \rho^{k_2},$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные интегрирования, определяемые из условий на наружной и внутренней поверхностях трубы:

Напряжения (ф-ла 1) могут быть представлены в таком виде.

$$\sigma_t = \frac{E_2}{1 - \mu_1 \mu_2} [C_1 (1 + \mu_1 k_1) \rho^{k_1-1} + C_2 (1 + \mu_1 k_2) \rho^{k_2-1}]$$

$$\sigma_r = \frac{E_1}{1 - \mu_1 \mu_2} [C_1 (k_1 + \mu_2) \rho^{k_1-1} + C_2 (k_2 + \mu_2) \rho^{k_2-1}].$$

Для наружной поверхности, т. е. при  $\rho = r_2$  напряжение  $\sigma_r$  равно наружному давлению, т. е.  $\sigma_r = -p_n$ , а на внутренней при  $\rho = r_1$  — внутреннему, т. е.  $\sigma_r = -p_n$ . Подставляя эти значения, получаем два уравнения для определения  $C_1$  и  $C_2$ :

$$-p_n \frac{1 - \mu_1 \mu_2}{E_1} = C_1 (k_1 + \mu_2) r_1^{k_1-1} + C_2 (k_2 + \mu_2) r_1^{k_2-1}$$

$$-p_n \frac{1 - \mu_1 \mu_2}{E_1} = C_1 (k_1 + \mu_2) r_2^{k_1-1} + C_2 (k_2 + \mu_2) r_2^{k_2-1}$$

откуда:

$$C_1 = \frac{1 - \mu_1 \mu_2}{E_1} \cdot \frac{p_n r_2^{k_2-1} - p_n r_1^{k_2-1}}{(k_1 + \mu_2) (r_2^{k_1-1} r_1^{k_2-1} - r_1^{k_1-1} r_2^{k_2-1})}$$

$$C_2 = \frac{1 - \mu_1 \mu_2}{E_1} \cdot \frac{p_n r_2^{k_1-1} - p_n r_1^{k_1-1}}{(k_2 + \mu_2) (r_2^{k_2-1} r_1^{k_1-1} - r_2^{k_1-1} r_1^{k_2-1})}$$

Напряжения представятся окончательно в таком виде:

$$\sigma_t = \frac{E_2}{E_1} \left[ \frac{(1 + \mu_1 k_1) (p_n r_2^{k_2-1} - p_n r_1^{k_2-1}) \rho^{k_1-1}}{(k_1 + \mu_2) (r_2^{k_1-1} r_1^{k_2-1} - r_1^{k_1-1} r_2^{k_2-1})} - \frac{(k_2 + \mu_2) (r_2^{k_1-1} r_1^{k_2-1} - r_1^{k_1-1} r_2^{k_2-1})}{(p_n r_2^{k_1-1} - p_n r_1^{k_1-1}) \rho^{k_2-1}} \right]$$

$$\sigma_r = \frac{(p_n r_2^{k_2-1} - p_n r_1^{k_2-1}) \rho^{k_1-1}}{r_2^{k_1-1} r_1^{k_2-1} - r_1^{k_1-1} r_2^{k_2-1}} - \frac{(p_n r_2^{k_1-1} - p_n r_1^{k_1-1}) \rho^{k_2-1}}{r_2^{k_2-1} r_1^{k_1-1} - r_1^{k_2-1} r_2^{k_1-1}}$$

При действии одного внутреннего давления, т. е. когда  $p_a = 0$  имеем:

$$\sigma_t = \frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{p_b r_2^{k_2-1} \rho^{k_1-1}}{r_2^{k_1-1} r_1^{k_2-1} - r_1^{k_1-1} r_2^{k_2-1}} \cdot \left[ \frac{1 + \mu_1 k_1}{k_1 + \mu_2} - \frac{1 + \mu_1 k_2}{k_2 + \mu_2} \cdot \left( \frac{r_2}{\rho} \right)^{k_1 - k_2} \right] \quad (5)$$

$$\sigma_r = \frac{p_b r_2^{k_2-1} \rho^{k_1-1}}{r_2^{k_1-1} r_1^{k_2-1} - r_1^{k_1-1} r_2^{k_2-1}} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{r_2}{\rho} \right)^{k_1 - k_2} \right]$$

Формулы (4) и (5) дают значения напряжений в общем виде; в случае, когда  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$  и  $E_1 = E_2 = E$ , они совпадают с известными формулами напряжений в задаче Ламе.

Для примера проведем сравнительные подсчеты по приведенным формулам и формулам Ламе для случая сосновой трубы с внутренним диаметром 10 см и наружным 20 см, находящейся под действием одного внутреннего давления. По данным Н. А. Филиппова<sup>1</sup> для хвойных пород отношение модулей упругости  $\frac{E_1}{E_2}$  составляет, примерно, 3; каких бы то ни было данных о значениях коэффициентов Пуассона  $\mu_1$  и  $\mu_2$  в литературе нет; с некоторым приближением их можно положить равными нулю.<sup>2</sup> Тогда

$$k_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{3}} \approx \pm 0,577;$$

положив  $r_1 = 5$  см,  $r_2 = 10$  см,

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{3},$$

согласно формулам (5), имеем:

$$\sigma_t = \frac{1}{3} \cdot \frac{10^{-1,577} \rho^{-0,423}}{10^{-0,423} \cdot 5^{-1,577} - 5^{-0,423} \cdot 10^{-1,577}} \left[ 1,73 + 1,73 \left( \frac{10}{\rho} \right)^{1,154} \right] p_b$$

$$\sigma_r = \frac{10^{-1,577} \rho^{-0,423}}{10^{-0,423} \cdot 5^{-1,577} - 5^{-0,423} \cdot 10^{-1,577}} \left[ 1 - \left( \frac{10}{\rho} \right)^{1,154} \right] p_b$$

Произведя подсчеты:

$$\sigma_t = 0,931 \rho^{-0,423} \left[ 1 + \left( \frac{10}{\rho} \right)^{1,154} \right] p_b$$

$$\sigma_r = 1,615 \rho^{-0,423} \left[ 1 - \left( \frac{10}{\rho} \right)^{1,154} \right] p_b,$$

где  $\rho$  должно быть выражено в см.

Значения напряжений  $\sigma_t$  и  $\sigma_r$  для различных точек по толщине трубы выписаны во 2 и 3 столбцах приводимой ниже таблицы;

<sup>1</sup> Л. Н. Перелыгин и А. Х. Певцов. Механические свойства и испытания древесины. Москва 1934 г. стр. 183.

<sup>2</sup> Такое значение принималось ниж. К. К. Пичахи.

в 4 и 5 столбцах <sup>A</sup> приведены значения напряжений, подсчитанные по формулам Ламе.

$\rho$ см	По формулам 5		По формулам Ламе	
	$\sigma_t$	$\sigma_r$	$\sigma_t$	$\sigma_r$
5	1,562 $p_b$	— $p_b$	1,666 $p_b$	— $p_b$
6	1,222 $p_b$	— 0,607 $p_b$	1,257 $p_b$	— 0,591 $p_b$
7	1,023 $p_b$	— 0,362 $p_b$	1,013 $p_b$	— 0,347 $p_b$
8	0,892 $p_b$	— 0,208 $p_b$	0,853 $p_b$	— 0,186 $p_b$
9	0,784 $p_b$	— 0,083 $p_b$	0,743 $p_b$	— 0,077 $p_b$
10	0,701 $p_b$	0	0,666 $p_b$	0

Как видно из таблицы, расхождение между величинами напряжений, подсчитанными по обеим формулам, незначительна. Однако, делать из этого какие-либо выводы было бы поспешно, вследствие допущенных неточностей в принятых значениях числа Пуассона и отношения модулей, объясняемых недостаточностью экспериментальных данных. Более точное решение, которое позволило бы сделать какие-либо общие выводы, могло бы быть дано только после достаточно полного опытного изучения этих величин.

## UEBER DIE SPANNUNGSBESTIMMUNGEN BEI GEBOHRTEN HOLZRÖHREN

Prof. A. Mitfinskij

### ZUSAMMENFASSUNG

Die bekannte Lösung des Lamé'schen Problems in Betreff der Spannungen in einem unter Aussen und Innendruck stehenden dickwandigen Zylinder ist richtig nur unter der Bedingung, dass der Zylinder aus isotropem Werkstoff hergestellt ist.

Für die Spannungsbestimmung bei unter Innendruck stehenden Holzzylindern müssen die Unterschiede in der Grösse des Normalelastizitätsmoduls und der Poisson-Zahl in Radial- und Tangentialrichtung in Betracht gezogen werden.

Die Lösung dieser Aufgabe findet sich in der hier zur Veröffentlichung kommenden Arbeit. Die Spannungswerte im allgemeinen Falle — wenn der anisotrope Zylinder unter Innen- und Aussendruck steht — sind in Formel 4 gegeben. Formel 5 zeigt die Spannungswerte für den Sonderfall — wenn der Zylinder nur unter Innendruck steht.

Für die praktische Anwendung dieser Formeln zur Spannungsbestimmung in Holzzylindern ist es erforderlich auf Grund von Versuchsergebnissen die Zahlenwerte des Moduls  $E$  und der Poisson-Zahl in Beziehung auf die verschiedenen Verhältnisse zur Faserrichtung zu präzisieren.