УДК 533.06

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ПОДМОДЕЛЕЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

С. В. Головин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Построен новый класс точных решений, обладающих функциональным произволом и описывающих пространственные движения политропного газа, на основе инвариантных подмоделей ранга 2 эволюционного типа. В полученных решениях скорость является линейной функцией части пространственных координат. Решения описывают как непрерывный разлет газа, так и движения с коллапсом плотности в конечный момент времени.

Введение. Инвариантные подмодели ранга 2 уравнений газовой динамики эволюционного типа описывают точные решения, зависящие от двух независимых переменных: времени и некоторой комбинации пространственных координат. Эти подмодели задаются замкнутой системой дифференциальных уравнений в частных производных. В качестве искомых функций в них выступают инвариантные компоненты вектора скорости, а также плотность и давление. Для уравнений газовой динамики с произвольным уравнением состояния имеется 10 существенно различных инвариантных подмоделей рассматриваемого типа, в частности подмодель одномерных движений газа. В [1] построены канонические формы этих 10 подмоделей, в [2] изучены их групповые свойства.

В то же время конкретные решения указанных подмоделей исследованы недостаточно полно. Для выявления особенностей, присущих каждой подмодели, был выбран класс решений с линейной зависимостью одной из инвариантных компонент вектора скорости от инвариантной независимой переменной. Такие решения для подмодели одномерных движений газа являются классическими [3]. Для остальных девяти подмоделей можно дать следующую общую характеристику полученных решений. Во всех случаях интегрирование сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка. В исходных "физических" переменных этим решениям соответствуют движения с линейной зависимостью компонент вектора скорости от части пространственных переменных (в общем случае такие движения изучались в [4]). Решения описывают непрерывный разлет газа, коллапс плотности в конечный момент времени, колебательные режимы движения. Ниже описаны траектории отдельных частиц на полученных решениях, что позволяет получить представление о характере движения, задаваемого подмоделями. Среди решений выделяются два основных класса: движения, в которых траектории частиц являются плоскими кривыми, и движения с закруткой. Более подробное описание этих классов приведено ниже.

1. Предварительные сведения. Уравнения газовой динамики записываются в стандартных обозначениях вектора скорости $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$, давления p и плотности ρ. Все функции зависят от пространственных координат $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ и времени t. Функция $A(p, \rho)$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 02-01-00550, 00-15-96163).

задает уравнение состояния газа

$$
\begin{gathered}
D\boldsymbol{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \quad D\rho + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \quad Dp + A(p,\rho) \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \\
D = \partial_t + u\,\partial_x + v\,\partial_y + w\,\partial_z.
\end{gathered} \tag{1.1}
$$

Известно, что все инвариантные подмодели эволюционного типа ранга 2 для уравнений газовой динамики могут быть записаны в следующем каноническом виде [5]:

$$
\begin{gathered}
U_t + UU_\lambda + b(t)\rho^{-1}p_\lambda = a_1, \quad V_t + UV_\lambda = a_2, \quad W_t + UW_\lambda = a_3, \\
\rho_t + U\rho_\lambda + \rho U_\lambda = \rho a_4, \qquad p_t + Up_\lambda + A(p,\rho)U_\lambda = A(p,\rho)a_4.
\end{gathered} \tag{1.2}
$$

Здесь $\boldsymbol{U} = (U, V, W)$ — инвариантный вектор скорости; t, λ — инвариантные независимые переменные. Правые части $a_1, \dots, a_4$ зависят от t, λ и $\boldsymbol{U}$. Величины λ, $\boldsymbol{U}$, а также правые части $a_1, \dots, a_4$ выражаются через исходные переменные в каждой подмодели [1]. Анализ групповых свойств всех рассматриваемых подмоделей проведен в работе [2].

Ниже полностью описан класс решений подмоделей (1.2), в которых компонента U инвариантного вектора скорости $\boldsymbol{U}$ линейно зависит от переменной λ. Конструктивное описание этого класса решений возможно при выборе уравнения состояния политропного газа.

2. Интегрирование подмоделей. В уравнениях (1.2) делается переход к лагранжевым координатам t, ξ (ξ — произвольная функция, удовлетворяющая уравнению $\xi_t + U\xi_\lambda = 0$). С использованием функции $M = \partial\lambda/\partial\xi$ при переходе к лагранжевым переменным производные пересчитываются следующим образом: $h_t + Uh_\lambda \to h_t$, $h_\lambda \to M^{-1}h_\xi$. Компонента скорости в новых переменных есть $U = \lambda_t$. Переписывая (1.2) в лагранжевых переменных, получаем

$$
\begin{gathered}
\lambda_{tt} + b(t)p_\xi/(\rho M) = \tilde a_1, \qquad V_t = \tilde a_2, \qquad W_t = \tilde a_3, \\
\rho_t + M^{-1}\rho M_t = \rho \tilde a_4, \qquad p_t + M^{-1}A(p,\rho)M_t = A(p,\rho)\tilde a_4.
\end{gathered} \tag{2.1}
$$

Правые части $\tilde a_1, \dots, \tilde a_4$ есть записанные в лагранжевых переменных функции $a_1, \dots, a_4$. Ниже предполагается, что газ удовлетворяет политропному уравнению состояния: $A(p,\rho) = \gamma p$ (γ — показатель адиабаты). Из уравнений (2.1) следует

$$
(\ln \rho M)_t = \tilde a_4, \qquad (\ln pM^\gamma)_t = \gamma \tilde a_4. \tag{2.2}
$$

Второе и третье уравнения в (2.1), а также (2.2) с конкретными функциями в правых частях для всех девяти подмоделей интегрируются в явном виде. Далее используем предположение о линейности зависимости $U(\lambda)$. В лагранжевых переменных это означает, что $M = M(t)$:

$$
\lambda = M(t)\xi, \qquad U = \dot M \xi. \tag{2.3}
$$

Здесь и далее точка и штрих обозначают дифференцирование функций, зависящих только от t и ξ соответственно.

Замечание 1. *Неоднородная зависимость* $\lambda = M(t)\xi + h(t)$ *сводится к однородной, так как действием группы непрерывных преобразований, допускаемой* (1.1), *во всех подмоделях можно добиться* $h(t) \equiv 0$.

Подставляя (2.3) в первое уравнение (2.1), получим ключевое уравнение

$$
\ddot M \xi + b(t)\rho^{-1}M^{-1}p_\xi = \tilde a_1. \tag{2.4}
$$

Уравнение (2.4) после подстановки функций V, W, p, ρ, определенных из (2.1) и (2.2), имеет следующую структуру:

$$
\boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{b}(\xi) = 0, \tag{2.5}
$$

где векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2,\ 3,\ 4$). Отметим, что уравнения вида (2.5) характерны для задач, связанных с исследованием переопределенных систем дифференциальных уравнений (групповой классификации, частично инвариантных решений, дифференциальных связей, априорных предположений о виде решения). Основная идея, позволяющая произвести в (2.5) разделение переменных, предложена в [6, с. 144] при исследовании конкретного соотношения, возникающего в задаче групповой классификации уравнений газовой динамики. В общем виде лемма о разделении переменных в уравнении (2.5) публикуется здесь впервые с согласия ее автора.

Лемма Л. В. Овсянникова. *Соотношение* (2.5) *выполняется, если и только если существуют число* k ($0 \leqslant k \leqslant n$), *разбиения векторов* $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}', \boldsymbol{a}'')$, $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}', \boldsymbol{b}'')$ ($\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}' \in \mathbb{R}^k$; $\boldsymbol{a}'', \boldsymbol{b}'' \in \mathbb{R}^{n-k}$) *и постоянная* $((n-k)\times k)$*-матрица* C*, для которых*

$$\boldsymbol{a}'' = C\boldsymbol{a}', \qquad \boldsymbol{b}' = -C^{\mathrm{т}}\boldsymbol{b}'', \tag{2.6}$$

где $C^{\mathrm{т}}$ *— транспонированная матрица* C.

Доказательство. Пусть линейная оболочка $\mathcal{L}\{\boldsymbol{a}(t)\}$ имеет размерность k, $\boldsymbol{a} = (a^1, \ldots, a^n)^{\mathrm{т}}$; тогда найдутся такие k точек t_j ($j = 1, \ldots, k$), что $(n\times k)$-матрица $M = (a^i(t_j))$ (i — номера строк) будет иметь ранг k. Предположим, что ее ранговый минор дается $(k\times k)$-матрицей A ($\det A \neq 0$), а остальные строки образуют $((n-k)\times k)$-матрицу B. Пусть $\boldsymbol{a}'$ — те строки матрицы M, которые дают A, и $\boldsymbol{a}''$ — остальные строки. Дополнение матрицы M столбцом $(a^i(t))$ не меняет ее ранга. Поэтому найдется такой вектор $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \in \mathbb{R}^k$, для которого

$$\boldsymbol{a}' = A\boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{a}'' = B\boldsymbol{r}$$

и, значит, $\boldsymbol{r} = A^{-1}\boldsymbol{a}'$. Отсюда следует первое соотношение (2.6) с $((n-k)\times k)$-матрицей $C = BA^{-1}$. Тогда (2.5) принимает вид $\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}' + (C\boldsymbol{a}')\cdot\boldsymbol{b}'' = 0$ или $\boldsymbol{a}'\cdot(\boldsymbol{b}' + C^{\mathrm{т}}\boldsymbol{b}'') = 0$, откуда в силу $\dim\mathcal{L}(\boldsymbol{a}') = k$ следует (2.6). Достаточность (2.6) очевидна.

При решении классификационных задач приходится перебирать возможные значения $k = 0, \ldots, n$, разбиения векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и матрицы C с неопределенными элементами.

Ниже подмодели разбиваются на три типа в зависимости от размерности допускаемой группы непрерывных преобразований. К первому типу относятся подмодели 2.21, 2.22, 2.24 и 2.25 (сохранена нумерация из работы [1]). Бесконечномерная часть допускаемой ими группы содержит две произвольные функции лагранжевой переменной. Ко второму типу относятся подмодели 2.8, 2.9, 2.10, для которых допускаемая группа содержит одну произвольную функцию. Наконец, подмодели 2.20, 2.23 допускают лишь конечномерную группу. Оказывается, что изначально формальное разбиение подмоделей по типам подтверждается сходством физических характеристик получаемых решений.

3. Подмодели первого типа. Подмодель 2.21. Анализ данной подмодели проведен в [7]. Представление решения:

$$u = U, \quad v = \frac{V + z + t(W + y)}{t^2 + 1}, \quad w = \frac{-W - y + t(V + z)}{t^2 + 1}, \quad \lambda = x.$$

В (1.2) $b = 1$, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $a_4 = -2t/(t^2+1)$. Из второго и третьего уравнений в (2.1), а также из (2.2) следует

$$V = V_0(\xi), \qquad W = W_0(\xi), \qquad \rho = \frac{f(\xi)}{M(t^2+1)}, \qquad p = \frac{P(\xi)}{M^\gamma(t^2+1)^\gamma}. \tag{3.1}$$

Здесь и далее V_0, W_0, P, f — произвольные функции. Разделяя с использованием леммы переменные в (2.4), получаем для M уравнение типа уравнения Эмдена — Фаулера

$$\ddot{M}M^\gamma(t^2+1)^{\gamma-1} = \alpha, \qquad \alpha = \mathrm{const} \tag{3.2}$$