ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Н.Б. Баева,
Ю.В. Бондаренко

ОСНОВЫ ТЕОРИИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СХЕМЫ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебное пособие для вузов

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2009

§ 1. Постановка задачи векторной оптимизации. Принципы оптимальности

Рассмотрим задачу принятия решений, в которой качество альтернатив множества $\Omega = \left\{ X \in \mathbb{R}^n | g_i(X) \leq b_i, i = \overline{1, L} \right\}$ ($g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – непрерывные выпуклые функции) оценивается набором критериев – непрерывных функций $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k = \overline{1, M}$. Если цель решения задачи заключается в отыскании такой альтернативы $X^* \in \Omega$, в которой каждый из критериев принимает наибольшее или наименьшее значение, то в этом случае задача математически записывается следующим образом:

$$f_k(X) \to extr, \qquad k = \overline{1, M},$$

$$X \in \Omega \tag{1}$$

и называется *задачей векторной оптимизации* (ЗВО), а каждая из функций цели f_k – *частным критерием.*

Если в исходной задаче критерии однонаправлены, т. е. все критерии, например, стремятся к максимуму (или к минимуму), то задача называется *однородной.* В противном случае исходная задача – *неоднородная* задача оптимизации.

Если f_k – непрерывные, вогнутые функции, а Ω – непустой компакт (замкнутое, выпуклое множество), задача (1) называется *задачей выпуклой векторной оптимизации.* Именно такие задачи мы преимущественно и будем рассматривать.

Если $f_k(X)$ и $g_k(X)$ линейны, то задача (1) называется задачей *линейной векторной оптимизации.* Теория решения таких задач разработана наиболее полно (см., напр., [2], [8]).

С учетом того, что каждая оптимизационная задача может быть переписана в эквивалентной постановке как задача максимизации критериной задачи X^k единственно, то $\left\{X^1, ..., X^M\right\} \subset Pr$. Таким образом, $Pr \subseteq Sl$.

Доминирование. Недоминируемые критериальные векторы

Рассмотрим задачу векторной максимизации (2).

Каждой точке $X \in \mathbb{R}^n$ может быть поставлена в соответствие точка $Z = (z_1, ..., z_M)$, где $z_k = f_k(X)$. Тогда Z – элемент из $M-$мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^M$, которое принято называть *критериальным*, а его элементы – *критериальными векторами.* Множество $Q = \left\{(z_1, ..., z_M) \in \mathbb{R}^M | z_k = f_k(X), X \in \Omega\right\}$ называется *достижимым* множеством.

Таким образом, каждой задаче векторной максимизации (2) может быть поставлена в соответствие задача:

$$Z = \left\{Z_k, k = \overline{1, M}\right\} \to \max$$

$$Z \in Q. \tag{4}$$

Для установления аналогий между решениями задач (2) и (4) введем в рассмотрение следующие определения.

Пусть Z^1, Z^2 $\in \mathbb{R}^n$ – критериальные векторы.

Определение 4. Вектор Z^1 *слабо доминирует* вектор Z^2, если $Z^1 \geq Z^2$, $Z^1 \neq Z^2$ (т. е. $z_k^1 \geq z_k^2$ для всех $k = \overline{1, M}$ и $z_k^1 > z_k^2$, по крайней мере, для одного k).

Определение 5. Вектор Z^1 *сильно доминирует* вектор Z^2, если $Z^1 > Z^2$, т. е. $z_k^1 > z_k^2$ для всех $k = \overline{1, M}$.

Определение 6. Критериальный вектор Z^* называется *недоминируемым,* если не существует другого вектора $Z \in Q$ такого, что $Z \geq Z^*$, $Z \neq Z^*$.

Иначе Z^* называется *доминируемым.*

ђdddуеҰ bЕ dedЁbҰзе d εαδcδч ∃dddҰdуè

Определение 7. Критериальный вектор Z^* называется *недоминируемым сильно*, если не существует другого вектора $Z \in Q$ такого, что $Z > Z^*$.

В рамках введенных определений Парето-оптимальное множество задачи (2) состоит из таких и только таких точек $X \in \Omega$, критериальные векторы которых являются недоминируемыми, а множество Слейтера включает точки, критериальные векторы которых недоминируются сильно.

Замечание 3. Соотношения $Z^1 \geqslant Z^2$ понимаются выполняемыми покоординатно.

Примеры

Пример 1. Представить графически достижимую область в пространстве критериев для задачи:

$$f_1(X) = 2x_1 + x_2 \to \max,$$

$$f_2(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\Omega = \begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение

Допустимое множество задачи представлено на рисунке 1.

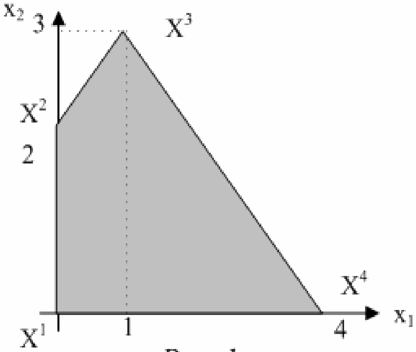

Рис. 1

Вершинами многогранника Ω являются точки $X^1 = (0,0)$, $X^2 = (0,2)$, $X^3 = (1,3)$, $X^4 = (4,0)$. Каждая точка X множества Ω является выпуклой линейной комбинацией вершин $X^1,\ldots,X^4$, т. е. $X = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i X^i$, $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$.

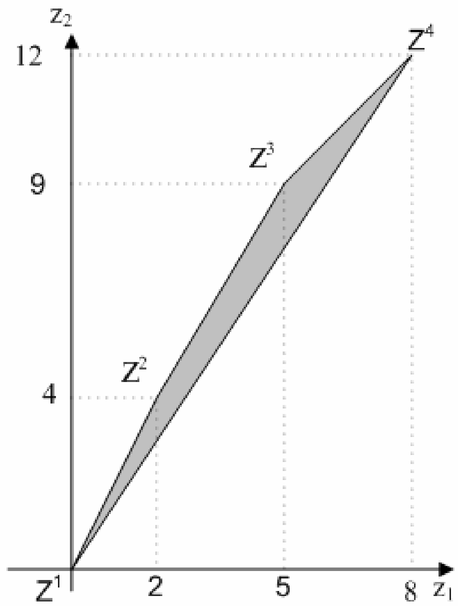

Рис. 2

Рассмотрим отображение $F : \Omega \to Q$, определяемое правилом:

$$F(x_1, x_2) = (z_1, z_2),$$

где $z_1 = 2x_1 + x_2$, $z_2 = 3x_1 + 2x_2$. Отображение F является линейным оператором, и поэтому образ любой точки $X \in \Omega$ является линейной комбинацией образов вершин допустимого множества, т. е. $F(X) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i Z^i$, где $Z^i = F(X^i)$, т. е. Q является выпуклым многогранником, вершины которого находятся среди точек Z^1, Z^2, Z^3, Z^4.

Найдем координаты точки Z^1: $z_1^1 = f_1(X^1) = f_1(0,0) = 0$, $z_2^1 = f_2(X^1) = f_2(0,0) = 0$, т. е. $Z^1 = (0,0)$. Аналогично: $Z^2 = (2,4)$, $Z^3 = (5,9)$, $Z^4 = (8,12)$.

Достижимое множество в пространстве критериев Q изображено на рисунке 2.