

Министерство образования и науки Российской Федерации
Министерство высшего и среднего специального
образования Республики Узбекистан

Сибирский федеральный университет
Национальный университет Узбекистана
имени Мирзо Улугбека

Г. Худайбергганов, А. М. Кытманов, Б. А. Шаимкулов

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ В МАТРИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ

Монография

Красноярск, Ташкент

2011

УДК 517.55

ББК 22.161

X98

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. Л.А. Айзенберг

д-р физ.-мат. наук, проф. А.К. Варисов

X98 Худайбергганов, Г.

Комплексный анализ в матричных областях / Г. Худайбергганов,
А.М. Кытманов, Б.А. Шаимкулов. – Красноярск: Сибирский
федеральный ун-т, 2011. – 290 с.

ISBN 978-5-7638-2199-4

Монография посвящена комплексному анализу в матричных областях многомерного комплексного пространства. В ней рассмотрены интегральные представления для голоморфных функций и их различные приложения к вопросам голоморфного продолжения, построению локального вычета и др.

Предназначена для студентов, аспирантов и специалистов по многомерному комплексному анализу.

УДК 517.55

ББК 22.161

ISBN 978-5-7638-2199-4

© Сибирский
федеральный
университет, 2011

© Национальный
университет
Узбекистана имени
Мирзо Улугбека,
2011

Оглавление

Предисловие.....	8
ГЛАВА 1. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ И ГОЛОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ ОТ НЕСКОЛЬКИХ МАТРИЦ	9
§ 1. Некоторые матричные области в пространстве $\mathbb{C}^n[m \times m]$	9
1.1. Матричный единичный круг.....	9
1.2. Матричная верхняя полуплоскость.....	11
1.3. Матричный единичный поликруг.....	11
1.4. Матричный шар.....	12
1.5. Матричная область Зигеля второго рода.....	13
1.6. Матричная область Рейнхарта.....	13
§ 2. Степенные ряды от матриц.....	16
2.1. Матричная норма	16
2.2. Степенные ряды в $\mathbb{C}[m \times m]$	17
2.3. Формула Коши-Адамара.....	22
2.4. Области сходимости степенных рядов.....	23
2.5. Степенные ряды в $\mathbb{C}^n[m \times m]$	24
2.6. Критерий (абсолютной) сходимости.....	25
2.7. Логарифмически выпуклая оболочка области в $\mathbb{C}^n[m \times m]$	27
2.8. Теорема Гартогса.....	29
§ 3. Голоморфные функции и области голоморфности в $\mathbb{C}^n[m \times m]$	30
3.1. Определения.....	30
3.2. Связь между голоморфными функциями от nm^2 переменных и голоморфными функциями от нескольких матриц	33
3.3. Области сходимости – области голоморфности.....	35

3.4.	Кратная интегральная формула Бохнера-Хуа Локена	36
3.5.	Доказательство основного результата главы 1	40
	Примечания к главе 1	44
ГЛАВА 2. МНОГОМЕРНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ТЕОРЕМЫ МОРЕРА...		45
§ 4.	Многомерные граничные теоремы Морера в поликруге и шаре	45
4.1.	Известные результаты	45
4.2.	Граничная теорема Морера для поликруга	48
4.3.	Граничная теорема Морера для шара	52
§ 5.	Условия существования аналитического продолжения функций в классических областях	56
5.1.	Классические области	56
5.2.	Условия существования продолжения	59
5.3.	Граничные теоремы Морера для классических областей	66
§ 6.	Многомерные граничные теоремы Морера для неограниченной реализации поликруга и шара	70
6.1.	Граничная теорема Морера для неограниченной реализации поликруга	70
6.2.	Граничная теорема Морера для неограниченной реализации шара	77
	Примечания к главе 2	91
ГЛАВА 3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ КАРЛЕМАНА В МАТРИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ.....		92
§ 7.	Интегральные представления	92
7.1.	Автоморфизмы матричного шара	93
7.2.	Интегральная формула Бергмана для матричного шара	102
7.3.	Ядра Коши-Сеге и Пуассона для матричного шара	105
§ 8.	Формулы Карлемана	115

8.1.	Формула Карлемана для функций от матриц.....	115
8.2.	Формулы Карлемана в классических областях.....	117
8.3.	Формула Карлемана в матричном шаре.....	123
8.4.	Граничная теорема Морера для матричного шара.....	128
Примечания к главе 3.....		134
ГЛАВА 4. МНОГОМЕРНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ТЕОРЕМЫ МОРЕРА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ МАТРИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ.....		135
§ 9.	Граничная теорема Морера для матричной верхней полуплоскости.....	135
§ 10.	Теорема Морера в неограниченной реализации матричного шара.....	144
10.1.	О неограниченной реализации матричного шара.....	144
10.2.	Об интегральных представлениях в области Зигеля \mathfrak{D}	150
10.3.	Граничная теорема Морера для области Зигеля \mathfrak{D}	154
Примечания к главе 4.....		164
ГЛАВА 5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ГОЛОМОРФНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ.....		165
§ 11.	Критерии существования голоморфного продолжения непрерывной функции, заданной на части границы области в \mathbb{C}^n	165
§ 12.	О возможности голоморфного продолжения в матричную область функций, заданных на куске ее границы Шилова	172
§ 13.	О возможности голоморфного продолжения в шар Ли функций, заданных на части сферы Ли.....	181
§ 14.	Об условиях голоморфной продолжимости в трубчатую область функций, заданных на остоле трубчатой области	192
§ 15.	Интерполяционные последовательности в классических областях.....	198
Примечания к главе 5.....		215

ГЛАВА 6. ТЕОРИЯ ЛОКАЛЬНОГО ВЫЧЕТА ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ОТ МАТРИЦ..... 216

§ 16. Интегральные представления локального вычета для голоморфных функций от матриц.....	217
§ 17. Свойства локального вычета.....	223
§ 18. Представление локального вычета через след и распространение формулы Бишоп на функции от матриц.....	227
§ 19. Формула Вейля и принцип Руше $\mathbb{C}[t \times t]$	233
§ 20. Обобщенная интегральная реализация локального вычета	238
20.1. Общий рецепт интегральной реализации локального вычета Гротендика.....	240
20.2. Примеры и преобразование локального вычета Гротендика при композициях отображений.....	242
Примечания к главе 6.....	246

ГЛАВА 7. РАСШИРЕННЫЕ МАТРИЧНЫЕ ТРУБА И КРУГ.....247

§ 21. Труба будущего.....	247
21.1. Определения.....	247
21.2. Касательное пространство. Форма Леви.....	248
21.3. Групповая структура. Автоморфизмы	250
§ 22. Труба будущего как классическая область.....	251
22.1. Реализация трубы будущего в виде матричного единичного круга.....	251
22.2. Геометрия матричного единичного круга.....	252
22.3. Реализация трубы будущего в виде шара Ли	255
§ 23. Расширенный матричный круг. Определения и гипотезы....	258
§ 24. Критерий голоморфной выпуклости для областей в \mathbb{C}^n , инвариантных относительно действия компактных групп Ли.....	260
24.1. Факторы относительно действия групп.....	260
24.2. Теорема Гильберта.....	263

24.3.	Орбитальная выпуклость.....	264
24.4.	Эквивариантная теорема продолжения.....	264
24.5.	Критерий голоморфной выпуклости.....	265
§ 25.	Доказательство гипотезы о расширенном матричном круге...	266
25.1.	Насыщенные орбитально псевдовыпуклые области ...	267
25.2.	Орбитально выпуклые области.....	268
25.3.	Расширенный матричный круг является орбитально выпуклым.....	269
25.4.	Расширенный матричный круг является насыщенным.....	269
25.5.	Основной результат.....	270
§ 26.	Гипотеза о расширенной матричной трубе.....	270
26.1.	Частные случаи.....	271
26.2.	Матричная формулировка гипотезы о расширенной трубе будущего.....	272
26.3.	Схема доказательства гипотезы о расширенной матричной полуплоскости.....	274
Примечания к главе 7.....		277
Список литературы.....		278

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная монография посвящена комплексному анализу в матричных областях пространства \mathbb{C}^n . В ней изложены результаты, полученные в течение последних 30 лет в Красноярском государственном университете (ныне Сибирский федеральный университет), Национальном университете Узбекистана (кроме главы 7). В монографии рассмотрены различные матричные области – матричный круг, матричный поликруг, матричная верхняя полуплоскость, классические области Картана, области Зигеля второго рода, матричные области Рейнхарта.

В такого вида областях получены многомерные граничные теоремы Морера и теоремы о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения. Построены формулы Карлемана, восстанавливающие значения голоморфной функции в области по ее значениям на части границы. Доказаны критерии существования голоморфного продолжения функций, непрерывных на части остова матричных областей различного вида – классических областей первого типа, шара Ли, трубчатых областей. Построена теория локального вычета для голоморфных функций от матриц. Рассмотрены известные гипотезы о расширенном матричном круге и о расширенной трубе будущего.

Нумерация параграфов сквозная. Нумерация теорем, лемм, предложений и формул – двойная и состоит из номера параграфа и номера теоремы, леммы, предложения или формулы. Конец доказательства отмечает-ся знаком \square .