

СЕРИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
НАУКИ







Основан в январе 1990 г.

Выходит один раз в квартал

№ 4

2010

Серия «Физико-математические науки»

# ВЕСТНИК МОРДОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

НАУЧНО-ПУБЛИЦИСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Учредитель – Национальный исследовательский Мордовский  
государственный университет им. Н. П. Огарева

*Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций  
(Роскомнадзор), свидетельство ПИ № ФС77- 8554 от 21 декабря 2009 года*

## АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Лапин С. В. Продолжение операции умножения в $E_\infty$ -алгебрах до $A_\infty$ -морфизма $E_\infty$ -алгебр и картановские объекты в категории алгебр Мэя	4
Лапин С. В. Гомотопическая инвариантность возмущений квантовых дифференциальных модулей	9
Ладоскин М. В. Структура $A_\infty$ -модуля на кольцах многочленов	14
Бритов А. В., Чудаев А. Э. Одна модель общей теории перспективы	17
Б. В. Раушенбаха	17
Песков Р. Н., Щенников В. Н. Способ минимизации дизъюнктивных нормальных форм булевых функций	26

## КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Шестаков А. А., Дружинина О. В. О развитии второго метода Ляпунова качественного исследования в целом динамических систем	30
Дружинина О. В., Шестаков А. А. О распространении метода Фроммера на многомерные аналитические дифференциальные системы	35
Дружинина О. В., Петрова С. Н. Существование колебательных режимов динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями	39
Александров А. Ю., Платонов А. В. Условия предельной ограниченности решений одной дискретной модели динамики популяций с переключениями	42
Зараник У. П., Жабко А. П. Об одном способе приближения области асимптотической устойчивости дифференциально-разностных систем	46
Афонин В. В. Вывод нелинейного объекта третьего порядка на заданное движение	52



Афиногентова Е. В. Устойчивость состояния равновесия системы дифференциальных уравнений при решении численным методом Эйлера . . . . .	54
Козлов М. В., Щенников В. Н. Равномерная ограниченность систем сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений . . . . .	56
Лапшина Р. Б. Асимптотические свойства решений функционально-дифференциальной системы . . . . .	59
Никонов В. И. Об устойчивости линейных систем относительно части переменных . . . . .	62
Лизина Е. А. Устойчивость движения относительно части переменных непрерывно-дискретной системы . . . . .	66

## **ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА**

Шихаев К. Н. Теория и практика числовых рядов степеней и радикалов . . . . .	69
Тактаров Н. Г., Миронова С. М. Математическое моделирование волн в слое жидкого диэлектрика на пористом основании . . . . .	75
Федосин С. А., Ладяев Д. А., Марьина О. А. Анализ и сравнение методов обучения нейронных сетей . . . . .	79
Гурченков А. А., Иванов И. М., Фесечко А. И. Управление вращающимися твердыми телами с жидким наполнением . . . . .	89
Петрова Н. П. О методах оценки сочетаемости слов в моделях семантического предпочтения. . . . .	93
Курносоев Г. А., Пескова О. В. Применение метода вычислительного эксперимента при исследовании резонансной частоты колебаний спирального тела накала . . . . .	98
Савкина А. В. Разработка системы хранения и поиска растровых изображений на основе вейвлет-преобразования, фрактального кодирования и смешанного подхода . . . . .	104
Бакаева О. А. Определение минимального объема выборки . . . . .	111
Базеева Н. А., Голечков Ю. И., Щенникова Е. В. О структуре пакета проблемно-ориентированных программ, используемых при математическом моделировании динамических систем транспорта . . . . .	114
Лаптев Г. А., Батин В. В. Радиационно-защитные свойства металлобетонов при воздействии рентгеновских лучей . . . . .	118
Матвиевский А. А., Емельянов Д. В., Юдин П. В. Оптимизация составов наполненных цементных композитов на активированной воде затворения . . . . .	121
Пономарев А. А. О выборе параметров метода «предиктор – корректор» . . . . .	124

<b>СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ</b> . . . . .	133
--------------------------------------	-----



Главный редактор **С. М. Вдовин**

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**

*Шапкарин К. И. (зам. гл. ред.), Макаркин Н. П., Фомин Н. Е.,  
Мартынова М. Д., Прытков Ю. Н., Сенин П. В., Лещанкин К. А.,  
Арсентьев Н. М., Сидоркина Т. Н., Усанова А. А., Ерофеев В. Т., Ревин В. В.,  
Нищев К. Н., Чучаев И. И., Мосин М. В., Сушкова Ю. Н., Гуляев И. В.,  
Гуськова Н. Д., Ямашкин А. А., Ахметова А. М., Ломишин М. И.,  
Буренина Н. В., Фомин А. П.*

Ответственный за номер: *Щенников В. Н.*



## ПРОДОЛЖЕНИЕ ОПЕРАЦИИ УМНОЖЕНИЯ В $E_\infty$ -АЛГЕБРАХ ДО $A_\infty$ -МОРФИЗМА $E_\infty$ -АЛГЕБР И КАРТАНОВСКИЕ ОБЪЕКТЫ В КАТЕГОРИИ АЛГЕБР МЭЯ\*

С. В. Лапин

В работе получен положительный ответ на указанный выше открытый вопрос о картановских объектах в категории алгебр Мэя. Получено новое доказательство формулы Картана для операций Стиррода в гомологиях произвольных  $E_\infty$ -алгебр.

В работе [6] при изучении алгебраической природы возникновения операций Стиррода в когомологиях топологических пространств Мэй определил категорию, объектами которой являются дифференциальные модули, снабженные некоторым специальным действием резольвенты симметрической группы. Главным свойством объектов этой категории, которые называются алгебрами Мэя, является то, что на их гомологиях всегда имеется функториальное действие операций Стиррода. Для того чтобы операции Стиррода в гомологиях алгебр Мэя имели свойства, аналогичные свойствам операций Стиррода в когомологиях топологических пространств, в [6] были введены понятия адемовского объекта и картановского объекта в категории алгебр Мэя. Более того, в [6] было показано, что для операций Стиррода в гомологиях адемовских алгебр Мэя справедливы соотношения Адема, а для операций Стиррода в гомологиях картановских алгебр Мэя имеет место формула Картана.

С другой стороны, в работе Смирнова [2] было введено понятие  $E_\infty$ -алгебры в категории дифференциальных модулей, являющееся гомотопически инвариантным аналогом понятия ассоциативной и коммутатив-

ной дифференциальной алгебры. По своему определению структура  $E_\infty$ -алгебры, заданная на дифференциальном модуле, каноническим образом определяет на этом дифференциальном модуле структуру адемовской алгебры Мэя. Таким образом, операции Стиррода в гомологиях произвольной  $E_\infty$ -алгебры удовлетворяют соотношениям Адема. В работе [5] Чатаур и Ливернет при помощи свойства кофибрантной порожденности категории  $E_\infty$ -алгебр показали, что для операций Стиррода в гомологиях любой  $E_\infty$ -алгебры справедлива формула Картана. Однако вопрос о том, является ли алгебра Мэя, происходящая из произвольной  $E_\infty$ -алгебры, картановским объектом в категории алгебр Мэя, остался открытым.

В данной статье при помощи гомотопической теории  $E_\infty$ -коалгебр из работы Смирнова [3] показано, что операция умножения  $\cup : X \otimes X \rightarrow X$  в произвольной  $E_\infty$ -алгебре продолжается до  $A_\infty$ -морфизма из  $E_\infty$ -алгебры  $X \otimes X$  в  $E_\infty$ -алгебру  $X$ . Как следствие получено, что каждая алгебра Мэя, происходящая из произвольной  $E_\infty$ -алгебры, является картановским объектом в категории алгебр Мэя. Другими словами, в работе получен положительный ответ на указанный выше от-

© С. В. Лапин, 2010

\* Работа поддержана грантом Президента Российской Федерации «Ведущие научные школы» (НШ-1562.2008.1).



крытый вопрос о картановских объектах в категории алгебр Мэя и, следовательно, получено новое по сравнению с [5] доказательство формулы Картана для операций Стиррода в гомологиях произвольных  $E_\infty$ -алгебр. Перейдем теперь к строгим определениям и формулировкам.

Напомним сначала для введения терминологии и обозначений необходимые определения и конструкции, связанные с понятиями операды и алгебры над операдой из работ [2–4].

Симметрическим семейством  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(j)_{j \geq 1}$  называется любое семейство дифференциальных градуированных  $\Sigma_j$ -модулей  $\mathcal{E}(j)$ , где  $\Sigma_j$  – симметрическая группа степени  $j$ . Морфизмом симметрических семейств  $f : \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}''$  называется произвольное семейство  $\Sigma_j$ -эквивариантных отображений дифференциальных градуированных модулей  $f = \{f(j) : \mathcal{E}'(j) \rightarrow \mathcal{E}''(j)_{j \geq 1}\}$ .

Для заданных симметрических семейств  $\mathcal{E}'$  и  $\mathcal{E}''$  рассмотрим симметрическое семейство  $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'' = (\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'')(j)_{j \geq 1}$ , где  $(\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'')(j)$  – фактор-модуль  $\Sigma_j$ -свободного дифференциального градуированного модуля, порожденного дифференциальным градуированным модулем

$$\sum_{j_1 + \dots + j_k = j} \mathcal{E}'(k) \otimes \mathcal{E}''(j_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{E}''(j_k),$$

по отношению эквивалентности  $\sim$ , которое определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x' \sigma \otimes x''_1 \otimes \dots \otimes x''_k &\sim \\ \sim x' \otimes x''_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes x''_{\sigma^{-1}(k)} \sigma(j_1, \dots, j_k), \\ x' \otimes x'_1 \sigma_1 \otimes \dots \otimes x'_k \sigma_k &\sim \\ \sim x' \otimes x''_1 \otimes \dots \otimes x''_k (\sigma_1 \times \dots \times \sigma_k). \end{aligned}$$

Здесь  $\sigma(j_1, \dots, j_k)$  – перестановка  $j$  элементов, получающаяся при разбиении множества из  $j$  элементов на  $k$  блоков по  $j_1, \dots, j_k$  элементов и воздействием на эти блоки перестановкой  $\sigma$ , и  $\sigma_1 \times \dots \times \sigma_k$  – образ элемента  $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  при вложении  $\Sigma_{j_1} \oplus \dots \oplus \Sigma_{j_k} \rightarrow \Sigma_j$ . Ясно, что рассмотренное  $\times$ -произведение ассоциативно, т. е. для произвольных симметрических семейств  $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{E}''$  имеется изоморфизм  $\mathcal{E} \times (\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'') \approx (\mathcal{E} \times \mathcal{E}') \times \mathcal{E}''$  в категории симметрических семейств.

Операдой  $(\mathcal{E}, \pi)$  называется симметрическое семейство  $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(j)\}_{j \geq 1}$ , рассматривае-

мое вместе с морфизмом симметрических семейств  $\pi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ , для которого выполнено условие  $\pi(\pi \times 1) = \pi(1 \times \pi)$ . Морфизм симметрических семейств  $\pi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  называется умножением операды  $(\mathcal{E}, \pi)$ . Морфизмом операд  $f : (\mathcal{E}', \pi') \rightarrow (\mathcal{E}'', \pi'')$  называется морфизм симметрических семейств  $f : \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}''$ , для которого выполнено условие  $f\pi' = \pi''(f \times f)$ .

Операда  $(\mathcal{E}, \pi)$  называется свободной, если эта операда, рассматриваемая как градуированная операда, т. е. рассматриваемая без дифференциала, является свободным объектом в категории градуированных операд. Операда  $(\mathcal{E}, \pi)$  называется  $\Sigma$ -свободной (соответственно ациклической), если для каждого  $j \geq 1$  дифференциальный градуированный модуль  $\mathcal{E}(j)$  является  $\Sigma_j$ -свободным (соответственно ациклическим).

Одной из важнейших операд в алгебраической топологии является построенная в работе [2] операда  $(E_\infty, \pi)$ . По своему построению операда  $(E_\infty, \pi)$  является свободной,  $\Sigma$ -свободной и ациклической операдой. Например, дифференциальный градуированный модуль  $E_\infty(2)$  является  $\Sigma_2$ -свободным ациклическим цепным комплексом с образующими  $\cup_i \in E_\infty(2)$  размерности  $i \geq 0$  и дифференциалом

$$d(\cup_i) = \cup_{i-1} + (-1)^i \cup_{i-1} T, \quad T \in \Sigma_2.$$

Напомним теперь понятие алгебры над операдой. Пусть заданы произвольный дифференциальный градуированный модуль  $X$  и некоторое симметрическое семейство  $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(j)\}_{j \geq 1}$ . Рассмотрим дифференциальный градуированный модуль

$$\mathcal{E} \times X = \bigoplus_{j \geq 1} \mathcal{E}(j) \otimes_{\Sigma_j} X^{\otimes j},$$

где симметрическая группа  $\Sigma_j$  действует на  $X^{\otimes j}$  перестановками сомножителей в тензорном произведении с обычным соглашением о знаках. Легко видеть, что для любых симметрических семейств  $\mathcal{E}', \mathcal{E}''$  и любого дифференциального градуированного модуля  $X$  имеет место изоморфизм  $\mathcal{E}' \times (\mathcal{E}'' \times X) \approx (\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'') \times X$  в категории дифференциальных градуированных модулей.

Алгеброй над операдой  $(\mathcal{E}, \pi)$ , или просто  $\mathcal{E}$ -алгеброй, называется дифференциальный градуированный модуль  $X$ , рассматриваемый вместе с фиксированным отображением дифференциальных градуированных модулей  $\mu : \mathcal{E} \times X \rightarrow X$ , для которого выпол-