Некоторые замечания об определении постоянных сейсмографа с гальванометрической регистрацией.

§1. В седьмой главе „Лекций по сейсмометрии" кн. Б. Б. Голицына изложена метода для определения постоянных сейсмографа при гальванометрической регистрации. Сущность этой методы состоит в том, что маятнику сообщается особым электромагнитным молоточком легкий толчок и наблюдаются небольшие отклонения гальванометра от положения покоя и момент прохождения его через это положение. По этим данным находятся постоянные μ^2 и $T=\frac{2\pi}{n}$ маятника, предполагая, что постоянная $n_1=\frac{2\pi}{T}$ для свободных колебаний гальванометра, установленного на границу апериодичности, известна.

Вывод относящихся сюда формул занимает в „Лекциях" около 30 страниц, что затрудняет его проверку. Такая сложность не есть следствие самой сущности вопроса, а происходит от неудачного выбора тех малых постоянных параметров, по степеням коих производится разложение в ряды и той несовершенной формы, в которой написаны общие интегралы уравнений движения маятника и гальванометра.

В настоящей заметке имеется в виду дать более простой вывод этих основных формул и уравнений, служащих для определения сказанных постоянных.

§2. При обозначениях, принятых в „Лекциях" дифференц. уравнения движения маятника и гальванометра суть:

$$\theta''+2\varepsilon\theta'+n^2\theta=0 \quad \ldots \quad (1)$$

$$\varphi''+2n_1\varphi'+n_1^2\varphi=-k\theta' \quad \ldots \quad (2)$$

и начальные условия суть: при $t=0$ должно быть

$$\left.\begin{array}{ll}\theta=0 & \text{и} \quad \theta'=a \\ \varphi=0 & \text{и} \quad \varphi'=0\end{array}\right\} \ldots (3)$$

Маятник настраивается также почти на границу апериодичности ($\varepsilon=n$) и притом так, чтобы его период колебаний без погашения был бы равен или весьма близок таковому же гальванаметра $(n=n_1)$, положим поэтому

$$\varepsilon = n_1+\alpha \qquad \text{и} \qquad n^2 = n_1^2+\beta$$

тогда α и β будут „малая" величина и уравнение (1) будет:

$$\theta''+2(n_1+\alpha)\theta'+(n_1^2+\beta)\theta=0 \quad \dots\dots \quad (1')$$

и полагая

$$\gamma=\sqrt{n^2-\varepsilon^2}=\sqrt{\beta-2n_1\alpha-\alpha^2} \quad \dots\dots \quad (4)$$

будем иметь:

$$\theta=\frac{ae^{-\varepsilon t}}{\gamma}\cdot\sin\gamma t = ae^{-n_1 t}\cdot e^{-\alpha t}\cdot\frac{\sin\gamma t}{\gamma}$$

откуда следует

$$\frac{\theta}{a}\cdot\frac{e^{n_1 t}}{t}=\left(1-\alpha t+\frac{\alpha^2t^2}{2}-\dots\right)\left(1-\frac{\gamma^2t^2}{6}+\frac{\gamma^4t^4}{120}+\dots\right)=$$

$$=1-\alpha t-\frac{\gamma^2}{6}\cdot t^2+\frac{\alpha^2}{2}\cdot t^2+\frac{\alpha\gamma^2}{6}\cdot t^3+\frac{\gamma^4t^4}{120}+\dots=$$

$$=1-\alpha t-\frac{\beta-2n_1\alpha-\alpha^2}{6}t^2+\frac{\alpha^2}{2}t^2+\frac{1}{6}(\alpha\beta-2n_1\alpha^2+\dots)t^3+$$

$$+\frac{1}{120}(\beta^2-4n_1\alpha\beta+4n_1^2\alpha^2+\dots)t^4$$

если ограничиваться в разложениях вторыми степенями ~~величинами~~ малых величин α и β. Делая приведение и полагая

$$\frac{\alpha}{n_1}=\alpha_1;\quad \frac{\beta}{n_1^2}=\beta_1 \quad \text{и} \quad n_1t=u$$

получим

$$\theta=\frac{a}{n_1}u\cdot e^{-u}\Big\{1+\alpha_1\left(\tfrac{1}{3}u^2-u\right)-\tfrac{1}{6}\beta_1u^2+\alpha_1^2\left(\tfrac{2}{3}u^2-\tfrac{1}{3}u^3+\tfrac{1}{30}u^4\right)+$$

$$+\alpha_1\beta_1\left(\tfrac{1}{6}u^3-\tfrac{1}{30}u^4\right)+\tfrac{1}{120}\beta_1^2u^4 \quad \dots \quad (5)$$

Ур.(2) вводя вместо t переменную u примет вид:

$$\frac{d^2\varphi}{du^2}+2\frac{d\varphi}{du}+\varphi=-\frac{k}{n_1}\cdot\frac{d\theta}{du} \quad \dots\dots \quad (6)$$

или обозначая значками производные по переменной

$$\varphi''+2\varphi'+\varphi=-\frac{k}{n_1}\cdot\theta' \quad \dots\dots \quad (6')$$

Общий интеграл уравнения

$$\varphi''+2n_1\varphi+n_1^2\varphi=\mathcal{F}(t) \quad \dots\dots \quad (6'')$$

может быть написан в таком виде:

$$\varphi=(A+Bt)e^{-n_1t}+e^{-n_1t}\int_0^t\mathcal{F}(\xi)\cdot e^{n_1\xi}(t-\xi)\,d\xi \quad \dots ($$

причем постоянные произвольные A и B определяются начальными условиями теми же самыми уравнениями (е)сли бы колебания были свободные, т.е. было бы $F(u)=0$, ибо при $t=0$ (т)ак само выражение содержащее функцию F так и его производная (о)бращается в нуль. Так как в нашем случае начальные условия (е)сть: при $t=0$ значит и при $u=0$ должно быть $\varphi=0$ и $\varphi'=0$, то (б)удет $A=0$ и $B=0$ и общее ур. 6'' будет

$$\varphi = e^{-n_1 t}\cdot\int_0^t F(\xi)\cdot e^{n_1\xi}(t-\xi)\,d\xi \quad \dots\dots\dots (8)$$

На основании этой общей формулы получим для ур. (6')

$$\frac{n_1}{k}\cdot\varphi\cdot e^{u} = -\int_0^u \frac{d\theta}{d\xi}\cdot e^{\xi}\cdot(u-\xi)\,d\xi = -\left[\theta\cdot e^{\xi}(u-\xi)\right]_0^u + \int_0^u \theta e^{\xi}\left[(u-1)-\xi\right]d\xi = \int_0^u \theta e^{\xi}\left[(u-1)-\xi\right]d\xi$$

Подставляя вместо Θ его величину (5) заменив предварительно $\underline{u}$ буквой ξ получим

$$\frac{n_1^2}{ak}\varphi\cdot e^{u} = \int_0^u\left[(u-1)-\xi\right]\cdot\left[\xi+\alpha_1\left(\tfrac{1}{3}\xi^3-\xi^2\right)-\tfrac{1}{6}\beta_1\xi^3+\alpha_1^2\left(\tfrac{2}{3}\xi^3-\tfrac{1}{3}\xi^4+\tfrac{1}{30}\xi^5\right)+\right.$$

$$\left.+\alpha_1\beta_1\left(\tfrac{1}{6}\xi^4-\tfrac{1}{30}\xi^5\right)+\tfrac{1}{120}\beta_1^2\xi^5\right]d\xi =$$

$$=(u-1)\cdot\left[\frac{u^2}{2}+\alpha_1\left(\tfrac{1}{12}u^4-\tfrac{1}{3}u^3\right)-\tfrac{1}{24}\beta_1 u^4+\alpha_1^2\left(\tfrac{1}{6}u^4-\tfrac{1}{15}u^5+\tfrac{1}{180}u^6\right)+\right.$$

$$\left.+\alpha_1\beta_1\left(\tfrac{1}{30}u^5-\tfrac{1}{180}u^6\right)+\tfrac{1}{720}\beta_1^2u^6\right]-$$

$$-\left[\tfrac{1}{3}u^3+\alpha_1\left(\tfrac{1}{15}u^5-\tfrac{1}{4}u^4\right)-\tfrac{1}{30}\beta_1u^5+\alpha_1^2\left(\tfrac{2}{15}u^5-\tfrac{1}{18}u^6+\tfrac{1}{210}u^7\right)+\alpha_1\beta_1\left(\tfrac{1}{36}u^6-\tfrac{1}{210}u^7\right)+\right.$$

$$\left.+\tfrac{1}{840}\beta_1^2u^7\right]$$

$$=u^2\left[\left(\tfrac{1}{6}u-\tfrac{1}{2}\right)+\alpha_1\left(\tfrac{1}{3}u-\tfrac{1}{6}u^2+\tfrac{1}{60}u^3\right)+\beta_1\left(\tfrac{1}{24}u^2-\tfrac{1}{120}u^5\right)+\alpha_1^2\left(-\tfrac{1}{6}u^2+\tfrac{1}{10}u^5-\tfrac{1}{60}u^4+\tfrac{1}{1260}u^5\right)\right.$$

$$\left.+\alpha_1\beta_1\left(-\tfrac{1}{30}u^3+\tfrac{1}{90}u^4-\tfrac{1}{1260}u^5\right)+\beta_1^2\left(-\tfrac{1}{720}u^4+\tfrac{1}{5040}u^5\right)\right]\dots(9)$$

§3. Ограничимся сперва в этой общей формуле членами 1-го порядка, тогда будет:

$$\frac{n_1^2}{ak}\varphi = e^{-u}\cdot u^2\left[\left(\tfrac{1}{6}u-\tfrac{1}{2}\right)+\alpha_1\left(\tfrac{1}{3}u-\tfrac{1}{6}u^2+\tfrac{1}{60}u^3\right)+\beta_1\left(\tfrac{1}{24}u^2-\tfrac{1}{120}u^3\right)\right]\dots(10)$$

Как видно главный член обращается в нуль при

$$u = u_0 = 3.$$

Подставляя это значение вместо $\underline{u}$ в выражения множителей при α_1 и β_1 видим, что φ обращается в ноль при