

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

О. П. Малютина

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

Учебно-методическое пособие

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2019

Содержание

Введение.....	4
1. Графическое преобразование элементарных функций.....	5
2. График суммы двух функций	8
3. График произведения двух функций	11
4. График функции $y = \frac{1}{f(x)}$	16
5. График частного двух функций.....	23
6. График функции от функции	28
Библиографический список	30

2. График функции $y = f(x+b)$ получается из графика функции $y = f(x)$ смещаясь на b единиц, на вектор вдоль оси абсцисс (рис. 2).

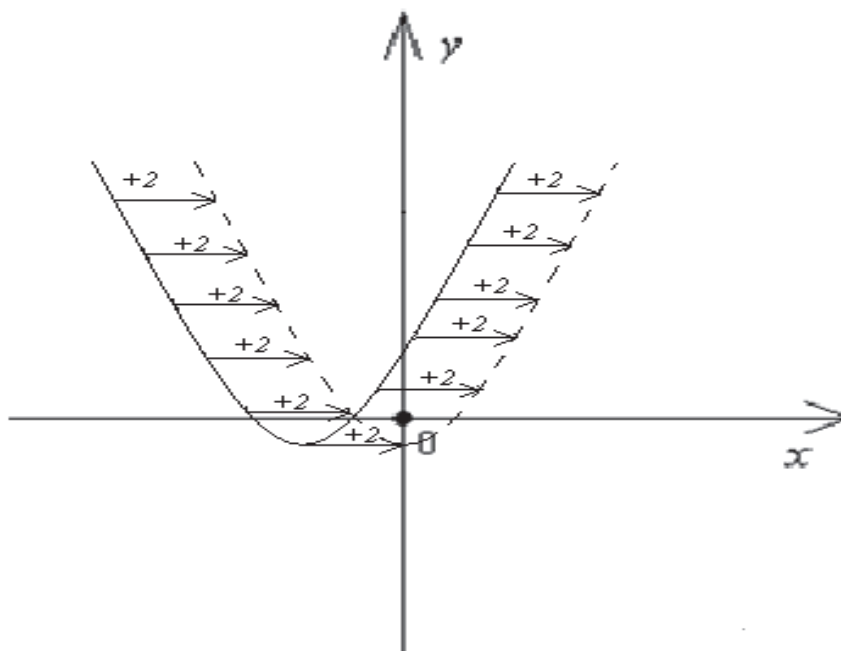


Рис. 2. График функции $y = f(x+b)$

2. График функции $y = -f(x)$ получается симметрией графика функции $y = f(x)$ относительно оси абсцисс (рис. 3).

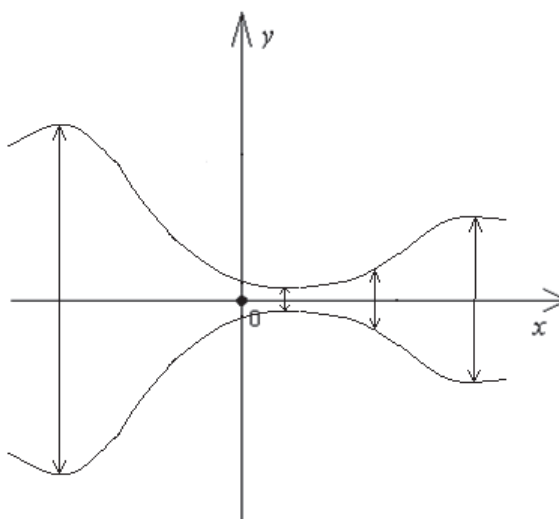


Рис. 3. График функции $y = -f(x)$

4. График функции $y = f(ax)$ получается сжатием графика функции $y = f(x)$ к оси ординат в a раз, если $a > 1$, и растяжением от оси ординат в a раз, если $0 < a < 1$ (рис. 4).

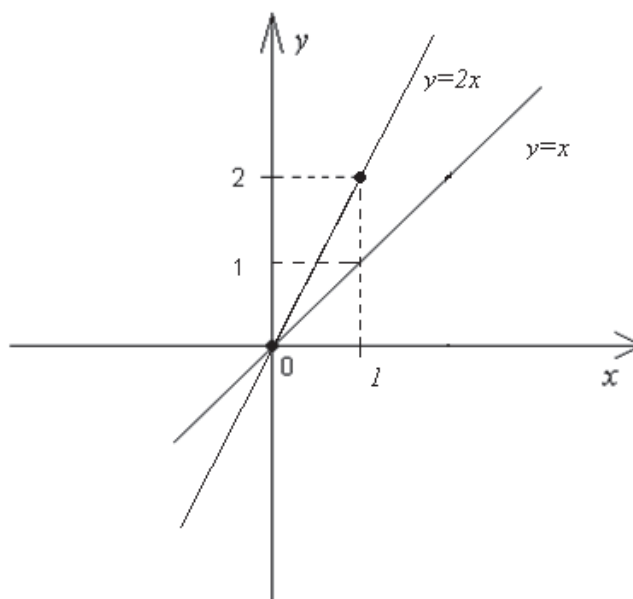


Рис. 4. График функции $y = f(ax)$

5. График функции $y = f(-x)$ получается симметрией графика функции $y = f(x)$ относительно оси ординат $y = f(x)$ $y = f(-x)$ (рис. 5).

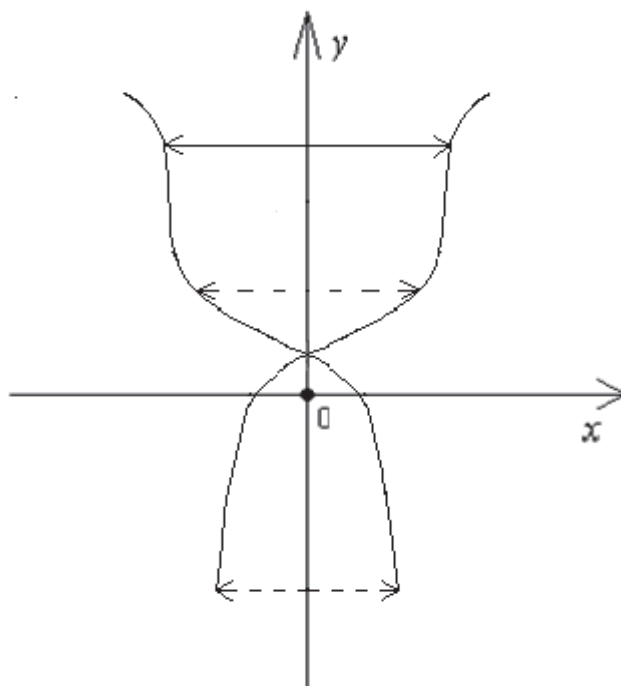


Рис. 5. График функции $y = f(-x)$

6. График функции $y = af(x)$ получается умножением каждой ординаты графика функции $y = f(x)$ на a , т.е. растяжением от оси абсцисс в a раз, если $a > 1$, и сжатием к оси абсцисс в a раз, если $0 < a < 1$, $y = f(x)$
 $y = af(x)$

7. График функции $y = |f(x)|$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$ там, где $f(x) > 0$, и получается из него симметрией относительно оси абсцисс там, где $f(x) < 0$.

8. График функции $y = f(|x|)$ при $x > 0$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$, при $x < 0$ он получается симметрией «правой половины» графика функции $y = f(x)$ относительно оси ординат (рис. 6).

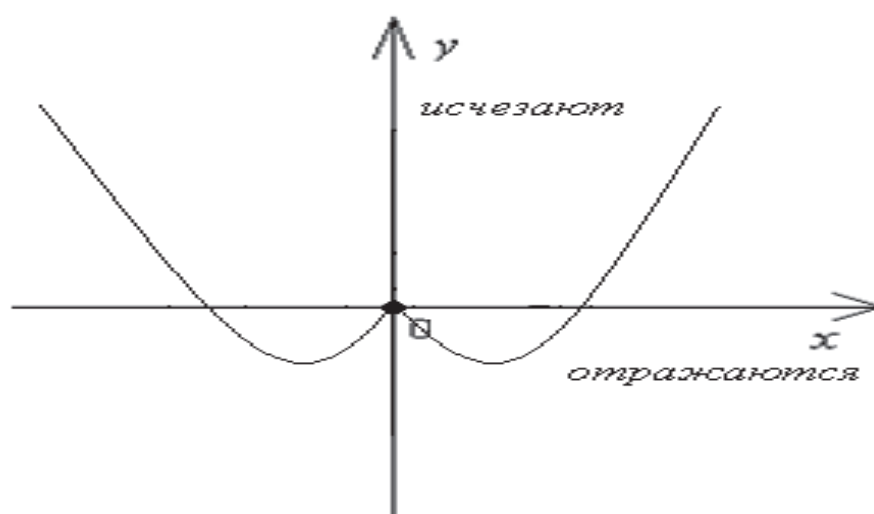


Рис. 6. График функции $y = f(|x|)$

Предлагаемый алгоритм построения графика функции $y = y(x)$ помогает сложиться умению представлять сложную функцию в виде композиции других функции.

При построении графиков сложных функций надо использовать все элементарные средства: переносы, отражения, сложение графиков т.д.

2. График суммы двух функций

Для построения графика функции $y = f(x) + g(x)$, если известны графики функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$, надо произвести алгебраическое сложение соответствующих ординат функций. Применение такого способа

целесообразно в случае, когда слагаемые являются основными элементарными функциями разных типов.

Примеры

1. $y = x + \sin x$

Построить график функции $y = x + \sin x$. Строим графики функции $y_1 = x$ и $y_2 = \sin x$ и получаем график заданной функции путем сложения соответствующих ординат.

Заметим, что функция y как сумма двух нечетных функций будет функцией нечетной, поэтому можно ограничиться анализом для $x \geq 0$.

В точках, где $y_2 = \sin x = 0$, получим $y = x$ (соответствующие точки графика заданной функции лежат на прямой $y = x$, поэтому рекомендуется пунктирной линией построить в качестве вспомогательной функции биссектрису первого и третьего координатного угла). В точках, где

$y_2 = 1$, $y = x + 1$ $\left(x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\right)$, соответственно $y_2 = -1$, $y = x - 1$

$\left(x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\right)$, а потому имеет смысл провести прямые $y = x + 1$ и $y = x - 1$, параллельные прямой $y = x$, между этими двумя прямыми располагается график функции $y = x + \sin x$ (рис. 7).

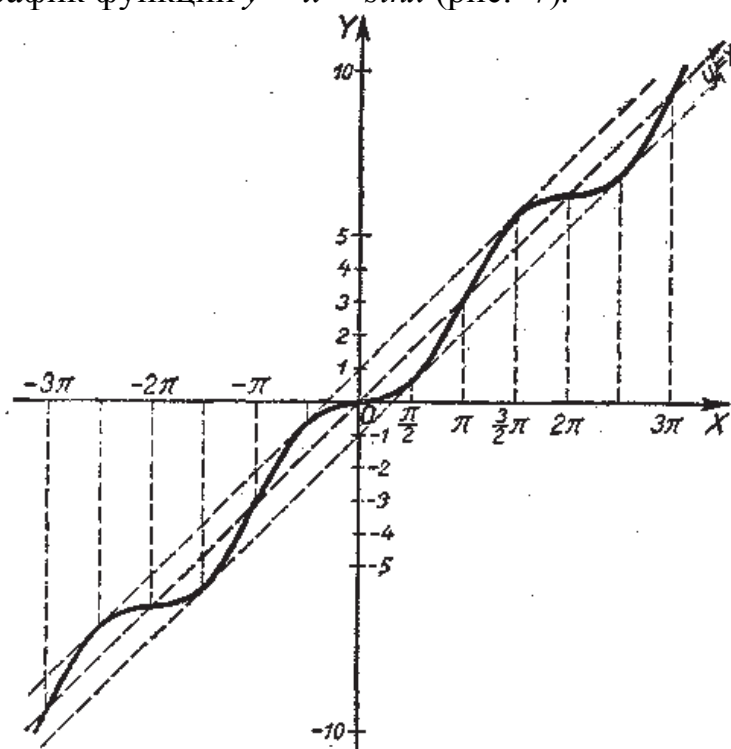


Рис. 7. График функции $y = x + \sin x$

2. $y = x + \operatorname{tg} x$

Построить график функции $y = x + \operatorname{tg} x$.

Строим графики функции $y_1 = x$ и $y_2 = \operatorname{tg} x$ и получаем график заданной функции путем сложения соответствующих ординат.

Заметим, что функция y как сумма двух нечетных функций будет функцией нечетной, поэтому можно ограничиться анализом для $x \geq 0$.

В точках, где $y_2 = \operatorname{tg} x = 0$, получим $y = x$ (соответствующие точки графика заданной функции лежат на прямой $y = x$, поэтому рекомендуется пунктирной линией построить в качестве вспомогательной функции биссектрису первого и третьего координатного угла). В точках, где $y_2 = \infty$, $y = \infty$ $\left(x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right)$, соответственно при $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ слева, $y \rightarrow +\infty$, а при $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ справа, $y \rightarrow -\infty$. Вспоминая о периодичности и нечетности, получаем рис. 8.

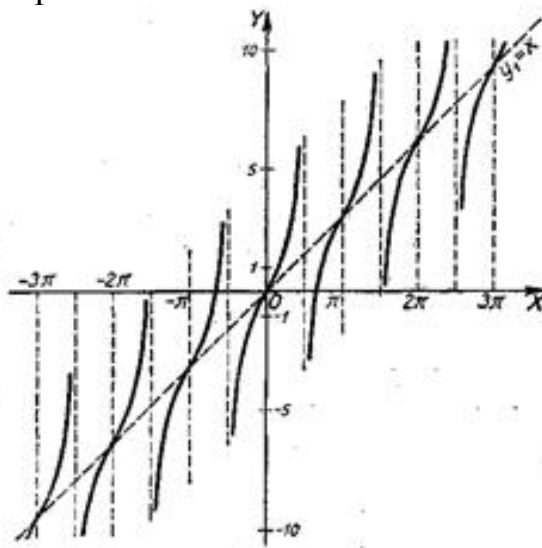


Рис. 8. График функции $y = x + \operatorname{tg} x$

3. $y = \operatorname{arctg} x + x$

Построить график функции $y = \operatorname{arctg} x + x$. Строим графики функции $y_1 = \operatorname{arctg} x$ и $y_2 = x$ и получаем график заданной функции путем сложения соответствующих ординат.

Заметим, что функция y как сумма одной нечетной $y_2 = x$ и функции общего вида будет функцией общего вида, поэтому нельзя ограничиться анализом лишь для $x \geq 0$. В точке, где $y_2 = 0$, получим $y = \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ ($x = 0$).