

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова

Л. Ю. Белова, Ю. А. Белов

Элементы теории множеств и математической логики

Теория и задачи

Учебное пособие

Рекомендовано

*Научно-методическим советом университета для студентов,
обучающихся по направлению Прикладная математика и информатика*

Ярославль 2012

УДК 510.23:510.6(075.8)
ББК В12я73
Б43

Рекомендовано

Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного издания. План 2012 года

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук, доцент Корнилов П. А.;
кафедра теории и методики преподавания информатики Ярославского
государственного педагогического университета им. К. Д. Ушинского,

**Белова, Л. Ю. Элементы теории множеств и математической
логики. Теория и задачи:** учебное пособие /Л. Ю. Белова,
Б43 Ю. А. Белов; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ,
2012. – 204 с.

ISBN 978-5-8397-0878-5

Пособие содержит материал по элементам теории множеств, исчислению высказываний, исчислению предикатов, булевым функциям. Приведён ряд задач, дополняющих основное содержание пособия.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 010400.62 Прикладная математика и информатика (дисциплина «Дискретная математика», цикл Б3), очной формы обучения.

ISBN 978-5-8397-0878-5

УДК 510.23:510.6(075.8)
ББК В12я73

© Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова, 2012

Содержание

Введение	6
1 Понятие множества	8
1.1 Примеры множеств	8
1.2 Обозначение и задание множеств	8
1.3 Отношения между множествами и операции над множествами	10
1.4 Свойства операций над множествами	13
2 Отношения и функции	15
2.1 Декартово произведение множеств	15
2.2 Отношения	17
2.3 Произведение отношений	18
2.4 Функции	20
2.5 Специальные свойства отношений на множестве	22
3 Эквивалентность множеств	29
3.1 Конечные множества	29
3.2 Счетные множества	33
4 Сравнение мощностей	36
4.1 Несчетные множества	36
4.2 Неравенство мощностей	41
5 Шкала мощностей	44
5.1 Теорема о шкале мощностей	44
5.2 Замечания	47
Задачи и упражнения	51
6 Элементы математической логики	59

6.1	Высказывания	59
6.2	Формальные теории	61
6.3	Исчисление высказываний	66
6.4	Примеры формальных выводов	69
7	Выводимость	72
7.1	Теорема о дедукции	72
7.2	Теорема о десяти выводимых правилах	75
8	Доказуемость, истинность, полнота	78
8.1	Булевы функции	78
8.2	Непротиворечивость исчисления высказываний	80
8.3	Выводимость и истинность	82
8.4	Полнота исчисления высказываний	86
8.5	Замечания	88
9	Логика предикатов	90
9.1	Предикаты	90
9.2	Алфавит и формулы исчисления предикатов	92
9.3	Свободные и связанные вхождения и подстановки	94
9.4	Аксиомы и правила вывода	95
9.5	Примеры простейших доказательств	97
10	Интерпретация формул логики предикатов	99
10.1	Определения	99
10.2	Примеры задания интерпретации	103
10.3	Логическое следование и равносильность	110
11	Непротиворечивость, неразрешимость, полнота	117
11.1	Непротиворечивость исчисления предикатов	117
11.2	Неразрешимость и полнота ИП	122

11.3	Пример необщезначимой k -общезначимой формулы	124
	Задачи и упражнения	128
12	Булевы функции	135
12.1	Элементарные булевы функции, равенство функций	135
12.2	Свойства основных операций для булевых функций	140
12.3	Формулы. Принцип двойственности	142
13	Полные системы функций	146
13.1	Теорема об СДНФ	146
13.2	Теоремы о полноте	150
14	Критерий функциональной полноты	155
14.1	Замкнутость	155
14.2	Основные леммы	159
14.3	Теорема о функциональной полноте	161
	Задачи и упражнения	165
	Решения, указания, ответы	169
	Множества	169
	Логика	183
	Булевы функции	192
	Литература	202