

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Ярославский государственный университет  
им. П. Г. Демидова

Л. Ю. Белова, Ю. А. Белов

# Элементы теории множеств и математической логики

Теория и задачи

*Учебное пособие*

*Рекомендовано*

*Научно-методическим советом университета для студентов,  
обучающихся по направлению Прикладная математика и информатика*

Ярославль 2012

УДК 510.23:510.6(075.8)  
ББК В12я73  
Б43

*Рекомендовано*  
*Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного*  
*издания. План 2012 года*

**Рецензенты:**

кандидат физико-математических наук, доцент Корнилов П. А.;  
кафедра теории и методики преподавания информатики Ярославского  
государственного педагогического университета им. К. Д. Ушинского,

**Белова, Л. Ю. Элементы теории множеств и математической  
логики. Теория и задачи:** учебное пособие /Л. Ю. Белова,  
Б43 Ю. А. Белов; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ,  
2012. – 204 с.

ISBN 978-5-8397-0878-5

Пособие содержит материал по элементам теории множеств, исчислению высказываний, исчислению предикатов, булевым функциям. Приведён ряд задач, дополняющих основное содержание пособия.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 010400.62 Прикладная математика и информатика (дисциплина «Дискретная математика», цикл Б3), очной формы обучения.

ISBN 978-5-8397-0878-5

УДК 510.23:510.6(075.8)  
ББК В12я73

© Ярославский государственный университет  
им. П. Г. Демидова, 2012

## Содержание

<b>Введение</b>	<b>6</b>
<b>1 Понятие множества</b>	<b>8</b>
1.1 Примеры множеств . . . . .	8
1.2 Обозначение и задание множеств . . . . .	8
1.3 Отношения между множествами и операции над множествами . . . . .	10
1.4 Свойства операций над множествами . . . . .	13
<b>2 Отношения и функции</b>	<b>15</b>
2.1 Декартово произведение множеств . . . . .	15
2.2 Отношения . . . . .	17
2.3 Произведение отношений . . . . .	18
2.4 Функции . . . . .	20
2.5 Специальные свойства отношений на множестве . .	22
<b>3 Эквивалентность множеств</b>	<b>29</b>
3.1 Конечные множества . . . . .	29
3.2 Счетные множества . . . . .	33
<b>4 Сравнение мощностей</b>	<b>36</b>
4.1 Несчетные множества . . . . .	36
4.2 Неравенство мощностей . . . . .	41
<b>5 Шкала мощностей</b>	<b>44</b>
5.1 Теорема о шкале мощностей . . . . .	44
5.2 Замечания . . . . .	47
Задачи и упражнения . . . . .	51
<b>6 Элементы математической логики</b>	<b>59</b>

6.1	Высказывания . . . . .	59
6.2	Формальные теории . . . . .	61
6.3	Исчисление высказываний . . . . .	66
6.4	Примеры формальных выводов . . . . .	69
<b>7</b>	<b>Выводимость</b>	<b>72</b>
7.1	Теорема о дедукции . . . . .	72
7.2	Теорема о десяти выводимых правилах . . . . .	75
<b>8</b>	<b>Доказуемость, истинность, полнота</b>	<b>78</b>
8.1	Булевы функции . . . . .	78
8.2	Непротиворечивость исчисления высказываний . .	80
8.3	Выводимость и истинность . . . . .	82
8.4	Полнота исчисления высказываний . . . . .	86
8.5	Замечания . . . . .	88
<b>9</b>	<b>Логика предикатов</b>	<b>90</b>
9.1	Предикаты . . . . .	90
9.2	Алфавит и формулы исчисления предикатов . . .	92
9.3	Свободные и связанные вхождения и подстановки .	94
9.4	Аксиомы и правила вывода . . . . .	95
9.5	Примеры простейших доказательств . . . . .	97
<b>10</b>	<b>Интерпретация формул логики предикатов</b>	<b>99</b>
10.1	Определения . . . . .	99
10.2	Примеры задания интерпретации . . . . .	103
10.3	Логическое следование и равносильность . . . . .	110
<b>11</b>	<b>Непротиворечивость, неразрешимость, полнота</b>	<b>117</b>
11.1	Непротиворечивость исчисления предикатов . . .	117
11.2	Неразрешимость и полнота ИП . . . . .	122

11.3	Пример необщезначимой $k$ -общезначимой формулы . . . . .	124
	Задачи и упражнения . . . . .	128
<b>12</b>	<b>Булевы функции</b>	<b>135</b>
12.1	Элементарные булевы функции, равенство функций . . . . .	135
12.2	Свойства основных операций для булевых функций . . . . .	140
12.3	Формулы. Принцип двойственности . . . . .	142
<b>13</b>	<b>Полные системы функций</b>	<b>146</b>
13.1	Теорема об СДНФ . . . . .	146
13.2	Теоремы о полноте . . . . .	150
<b>14</b>	<b>Критерий функциональной полноты</b>	<b>155</b>
14.1	Замкнутость . . . . .	155
14.2	Основные леммы . . . . .	159
14.3	Теорема о функциональной полноте . . . . .	161
	Задачи и упражнения . . . . .	165
	<b>Решения, указания, ответы</b>	<b>169</b>
	Множества . . . . .	169
	Логика . . . . .	183
	Булевы функции . . . . .	192
	<b>Литература</b>	<b>202</b>