ОСНОВАНІЯ

ГЕОМЕТРІИ.

РУКОВОДСТВО,

СОСТАВЛЕННОЕ ДЛЯ ГИМНАЗІЙ,

ФЕДОРОМЪ БУССЕ.

Изданіе седьмое.

МОСКВА.
ИЗДАНІЕ НАСЛѢДНИКОВЪ БРАТЬЕВЪ САЛАЕВЫХЪ.
1880.

Дозволено Цензурою. Москва, 26 Іюля 1880 года.

ТИПОГРАФІЯ И. И. СМИРНОВА, КУДРИНО, СОБ. ДОМЪ

ВВЕДЕНІЕ.

1. Разсматривая естественныя тѣла мы примѣчаемъ въ нихъ различныя свойства. Нѣкоторыя изъ послѣднихъ случайныя, другія необходимы и нераздѣльны отъ сущности тѣлъ. Въ числѣ необходимыхъ свойствъ находится и то, по которому всякое тѣло занимаетъ нѣкоторую часть пространства, и это-то свойство называется *протяженностью*, а занимаемая часть пространства—*протяженіемъ*. Какъ бы мало тѣло ни было, хотя бы оно и ускользало отъ нашихъ чувствъ, все же наполняетъ какую-нибудь, хотя и малѣйшую, часть пространства, и имѣетъ длину, ширину и вышину (которая въ нѣкоторыхъ случаяхъ называется толщиною или глубиною). Эти три измѣренія тѣлъ иногда весьма очевидны, напримѣръ въ какомъ нибудь зданіи, въ четыреугольномъ ящикѣ и т. п,; въ другихъ же тѣлахъ, какъ-то въ шарѣ, въ кускѣ необдѣланнаго камня и т. п., они неявственны.

2. Такъ какъ всѣ тѣла занимаютъ только часть пространства, то посему они должны имѣть свои границы или предѣлы, которые называются *поверхностями*. Поверхности, какъ границы тѣлъ, имѣютъ только два измѣренія: длину и ширину; и посему можно сказать, поверхность есть протяженіе, имѣющее два измѣренія, длину и ширину.

3. Предѣлы поверхностей, какъ протяженій, имѣющихъ два измѣренія, по необходимости могутъ имѣть только одно, то есть длину. Таковыя протяженія, одно только измѣреніе имѣющія, называются *линіями*. Эти послѣднія суть также протяженія конечной величины, и потому тоже имѣютъ свои границы, называемыя *точками*, которыя, какъ предѣлы протяженій одного только измѣренія, сами никакого измѣренія, то есть, ни длины, ни ширины и толщины, имѣть не могутъ.

4. Между двумя точками можно вообразить безчисленное множество линій, различнаго вида и величины. Кратчайшая изъ нихъ называется *прямою*. И такъ *прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками*.

Вообразимъ теперь поверхность, на которой можно представить себѣ прямыя линіи во всякомъ направленіи, то таковая поверхность называется плоскою или *плоскостью*. Слѣд. плоскость есть протяженіе, имѣющее два измѣренія, длину и ширину, и на которомъ можно себѣ представить прямыя линіи во всякомъ направленіи.

5. Протяженія всѣхъ трехъ родовъ, то есть протяженіе въ длину, ширину и толщину, протяженіе въ длину и ширину, и протяженіе въ одну

только длину, хотя отдѣльно отъ естественныхъ тѣлъ не существуютъ, однакожъ могутъ быть предметомъ изслѣдованій. Напримѣръ, когда намѣреваемся опредѣлить высоту какого нибудь зданія или дерева, то имѣемъ въ виду одно только измѣреніе, то есть разстояніе отъ вершины до основанія; когда говоримъ о величинѣ озера, представляемъ себѣ только два измѣренія—длину и ширину, не обращая вниманія на глубину его; если же нужно узнать вмѣстимость какого-нибудь сосуда, тогда опредѣляемъ всѣ три измѣренія. Теперь не трудно понять различіе между *геометрическимъ* и *физическимъ* тѣлами. Подъ первымъ разумѣютъ одно только протяженіе, а подъ послѣднимъ совокупность всѣхъ свойствъ, составляющихъ его сущность: протяженность, непроницаемость, скважность, плотность, дѣлимость и проч.

6. Очевидно, что форма и величина тѣлъ зависитъ отъ вида и величины поверхностей, ихъ ограничивающихъ; а эти послѣднія находятся опять въ связи съ формою и величиною линій, составляющихъ ихъ предѣлы; то изъ того и слѣдуетъ, что для точнаго познанія различныхъ свойствъ тѣлъ, должно начать разсматриваніемъ линій.

7. Систематическое изложеніе истинъ, служащихъ къ изысканію свойствъ протяженій всѣхъ трехъ родовъ и ихъ измѣренію, составляетъ науку, называемую *Геометріею* (*). Самое названіе, по своему словопроизводству, показываетъ, что она ведетъ также къ измѣренію земли. Въ самомъ дѣлѣ она, какъ изъ Исторіи извѣстно, была обязана своимъ происхожденіемъ потребности опредѣлять точнѣе участки земли, но въ послѣдствіи была развита въ высшей степени и получила высшее назначеніе.

8. Для легчайшаго обозрѣнія различныхъ частей Геометріи, раздѣляютъ ее на три главныхъ отдѣла, основываясь на томъ, что и протяженія бываютъ троякаго рода. Въ первой части разсматриваются свойства линій, или протяженій, имѣющихъ одно измѣреніе, т. е. длину, и потому присвоиваютъ этой части Геометріи названіе *Лонгиметріи*; во второмъ отдѣлѣ изслѣдуются поверхности, и преимущественно плоскости, и по этой причинѣ второе отдѣленіе получило названіе *Планиметріи*; и наконецъ въ третьей части, *Стереометріи*, излагается ученіе о тѣлахъ.

9. Свойства протяженій всѣхъ родовъ познаются преимущественно чрезъ ихъ сравненіе. Сравненіе же удобнѣйшимъ образомъ производится посредствомъ наложенія одной величины на другую, и посему *наложеніе* есть одинъ изъ способовъ, употребляемыхъ для доказательства геометрическихъ истинъ. Сравнивая данныя величины, находимъ различныя ихъ отношенія, которыя могутъ быть равны и не равны; и изъ такого

(*) Слово Геометрія взято изъ Греческаго языка: γῆ —значитъ земля, а *μετρέω* мѣряю.

сравненія происходитъ *теорія пропорціональныхъ величинъ*, составляющая второй способъ, которымъ пользуются при изслѣдованіи протяженій всѣхъ родовъ. Но иногда случается, что сравниваемыя величины, будучи весьма разнородны, не имѣютъ общей мѣры, но имѣютъ то свойство, что однѣ изъ нихъ постоянны, а другія измѣняются и притомъ такъ, что разность между первыми и послѣдними можетъ быть сдѣлана менѣе всякой произвольно взятой величины, какъ бы мала она ни была. Въ Ариѳметикѣ и Алгебрѣ мы уже встрѣчали такія величины; наприм. обращая дробь $^1/_3$ въ десятичную, получаемъ $^1/_3=0,3333....$, и чѣмъ болѣе возьмемъ десятичныхъ знаковъ, тѣмъ менѣе будетъ разность между постоянною дробью $^1/_3$ и измѣняющеюся десятичною дробью. Если остановимся на четвертомъ знакѣ, то разность между $^1/_3$ и $0,3333...$ будетъ менѣе одной десятитысячной; если же прибавимъ еще два знака, то разность будетъ менѣе одной милліонной, и т. д. Изъ сего видимъ, что разность можетъ быть сдѣлана менѣе всякаго произвольно-взятаго количества, какъ бы мало оно ни было. Возьмемъ еще одинъ примѣръ: пусть требуется извлечь квадратный корень изъ 2. Производя извѣстныя дѣйствія получимъ: $\sqrt{2}=1,414...$ И здѣсь находимъ, что, чѣмъ болѣе опредѣлимъ десятичныхъ знаковъ, тѣмъ менѣе будетъ разность между $\sqrt{2}$ и найденнымъ числомъ.

Сверхъ сего замѣчаемъ, что въ 1-мъ примѣрѣ данная дробь $^1/_3$ остается неизмѣнною, а измѣняется дробь десятичная $0,3333....$; во второмъ же примѣрѣ $\sqrt{2}$ остается постояннымъ, а измѣняется десятичная дробь $1,414....$ по мѣрѣ опредѣленія новыхъ десятичныхъ знаковъ. Также не трудно убѣдиться въ томъ, что разность между десятичною дробью $0,3333...$ и $^1/_3$ можетъ быть сдѣлана менѣе всякой величины, и что десятичная дробь увеличивается, съ прибавленіемъ новыхъ знаковъ, но никогда не можемъ достигнуть дроби $^1/_3$. По этой причинѣ $0,3333....$ называется *перемѣнною* величиною, а $^1/_3$ ея *предѣломъ*. Въ такомъ же отношеніи находится и $\sqrt{2}$ къ $1,414...$; посему $\sqrt{2}$ есть предѣлъ перемѣнной величины $1,414....$

Подобныя величины встрѣчаемъ и въ Геометріи; и изъ ихъ изслѣдованія выводятся нѣкоторыя важныя геометрическія предложенія, на которыхъ основанъ третій способъ доказательствъ, названный *способомъ предѣловъ*.

Основныя истины, которыя притомъ столь очевидны, что не требуютъ доказательства, называются *аксіомами*.

Приведемъ здѣсь главнѣйшія изъ нихъ:

I. Цѣлое болѣе своей части.

II. Всѣ части одного цѣлаго, вмѣстѣ взятыя составляютъ цѣлое.

III. Величина, которая ни больше, ни меньше другой, должна быть ей равна; величина, которая ни равна и ни больше другой, должна быть меньше; и наконецъ величина, которая ни равна и ни меньше другой, должна быть больше.

IV. Если къ равнымъ величинамъ придадутся равныя, то составятся равныя суммы.

V. Если отъ равныхъ величинъ отнимемъ равныя величины, то получимъ равныя разности.

VI. Двѣ величины, равныя порознь третьей, равны между собою.

VII. Если равныя величины увеличимъ или уменьшимъ въ одинаковое число разъ, то получимъ равныя величины.

VIII. Если къ одной и той же или къ двумъ равнымъ величинамъ приложатся неравныя, то и суммы ихъ не равны, и та изъ суммъ будетъ больше, которая происходитъ отъ прибавленія большей величины.

IX. Если отъ одной и той же или двухъ разныхъ величинъ отнимутся неравныя величины, то и остатки будутъ неравны; и тотъ остатокъ будетъ большій, который получается по отнятіи меньшей величины.

10. Истины, излагаемыя въ Геометріи, или столь очевидны, что не требуютъ никакого доказательства, и тогда онѣ называются, какъ выше уже было замѣчено, *аксіомами*, или онѣ не основаны непосредственно на возрѣніи, и суть результаты различныхъ соображеній, и посему должны быть доказаны; таковыя истины называются *теоремами*. Онѣ состоятъ изъ двухъ частей: въ одной предлагается доказываемая истина, а въ другой условія, при коихъ она имѣетъ мѣсто. Напримѣръ: *треугольники равны*, если три стороны одного порознь равны тремъ сторонамъ другаго.

Иногда цѣлью изслѣдованія бываетъ не выводъ свойствъ геометрическихъ протяженій, а рѣшеніе частныхъ вопросовъ, съ помощью особенныхъ построеній, согласно съ прежде доказанными теоремами; напримѣръ *раздѣлить прямую линію на двѣ, или три равныя части* и т. п.; то въ такомъ случаѣ предложеніе, выражающее таковое требованіе, называется *задачею*.

Теоремы и задачи должны быть расположены въ систематическомъ порядкѣ; онѣ должны находиться въ тѣсной, такъ сказать, неразрывной связи. Однакожъ, иногда нужно бываетъ ввести предложеніе, которое не проистекаетъ непосредственно изъ предъидущаго, и какъ бы прерываетъ связь между теоремами. Таковое предложеніе, необходимое для легчайшаго уразумѣнія послѣдующей теоремы, или для удобнѣйшаго рѣшенія заданнаго вопроса, носитъ нозваніе *леммы*.

ОТДѢЛЕНІЕ I.

О ЛИНІЯХЪ И ПЛОСКОСТЯХЪ.

Глава 1.

О ЛИНІЯХЪ, ПРЯМОЛИНЕЙНЫХЪ УГЛАХЪ И ФИГУРАХЪ.

I. О линіяхъ.

11. Линія, какъ всякая другая величина, можетъ быть раздѣлена на произвольное число частей. Концы каждой части раздѣленной линіи суть точки (§ 3); и такъ можно себѣ представить на линіи безчисленное множество точекъ, которыя тѣмъ ближе одна къ другой, чѣмъ на большее число частей раздѣлена линія. Если себѣ вообразимъ вмѣсто происшедшихъ точекъ что одна и та же точка находилась въ различныхъ мгновеніяхъ въ тѣхъ мѣстахъ, то въ такомъ случаѣ сдѣлается происхожденіе линіи, чрезъ безпрерывное движеніе точки, нагляднымъ. Направленія, по коимъ мы можемъ себѣ представить движеніе точки, весьма различны: и посему можно себѣ вообразить безчисленное множество различныхъ линій между двумя точками. Самая кратчайшая изъ нихъ называется *прямою линіею* или *прямою*, и по этой причинѣ между двумя данными точками можно провести только одну прямую линію.

12. Для означенія точки ставятъ букву подлѣ нея; прямая же линія означается двумя буквами, поставленными при ея концахъ. Такъ напримѣръ прямая, находящаяся между точками A и B (см. черт. 1) означается буквами A B.

13. Изъ опредѣленія прямой слѣдуетъ:

I. Двумя точками совершенно опредѣляется положеніе прямой линіи.

II. Если двѣ прямыя имѣютъ двѣ общія точки, то части ихъ, лежащія между этими точками, совпадаютъ. Положимъ (черт. 2), что меньшая линія AB наложена на большую CD такъ, что точка A упала въ C, а точка B въ E; то прямая AB совершенно совмѣстится съ частію CE прямой CD, потому что въ противномъ случаѣ между C и E находились бы двѣ различныя прямыя AB и CE, что не согласно съ опредѣленіемъ прямой.

III. Подобнымъ образомъ можно удостовѣриться, что двѣ прямыя совпадаютъ, если только двѣ точки одной совпадаютъ съ двумя точками другой. Выше уже объяснено, что если точка A (черт. 2) упадетъ въ C, а B въ E, то прямыя AB и CE совмѣстятся. Но какъ точка B взята на произвольномъ разстояніи отъ A; то изъ того слѣдуетъ, что то же самое и такимъ же способомъ можетъ быть выведено и для всякой другой точки M. Изъ этого же и слѣдуетъ, что всѣ точки одной прямой совмѣщаются съ точками другой, если онѣ имѣютъ только двѣ общія точки.

IV. Такъ какъ подъ линіею вообще подразумѣвается неопредѣленное протяженіе въ одну только длину, то изъ того можно заключить, что всякая несомкнутая линія, а посему и прямая, можетъ быть въ обѣ стороны продолжаема безпредѣльно, такъ что ее можно сдѣлать длиннѣе всякой данной линіи.

14. Нѣсколько прямыхъ, соединенныхъ между собою, и не составляющихъ одной прямой, образуютъ *ломанную линію*. Такъ напримѣръ прямыя AB, BC, CD, DE (черт. 3) образуютъ ABCDE.

15. Разсмотрѣвъ главныя свойства прямыхъ, скажемъ нѣсколько словъ объ ихъ измѣреніи. Измѣрить прямую значитъ: найти, сколько разъ въ ней содержится другая прямая, принимаемая за единицу; напримѣръ измѣрить разстояніе между предметами значитъ: опредѣлить сколько разъ въ этомъ разстояніи содержится аршинъ, или футъ, или какая нибудь другая линейная мѣра. Чтобъ найти, сколько разъ единица линейной мѣры содержится въ данной прямой, должно ее отлагать на прямой столько разъ, сколько возможно; и если случается остатокъ, то слѣдуетъ опредѣлить, какую часть принятой единицы составляетъ полученный остатокъ. Изъ этого происходитъ слѣдующая задача.

Задача: *найти общую мѣру данныхъ двухъ прямыхъ, или опредѣлить ихъ отношеніе.*

Пусть будутъ (черт. 4) AB и CD данныя прямыя. Отлагая на большей линіи AB меньшую CD, сколько разъ возможно, найдемъ, что отъ A до I она можетъ быть отложена 4 раза, и сверхъ сего остается еще IB; и такъ

$$AB = 4\ CD + IB.\ (1)$$

Отлагая остатокъ IB на CD, находимъ, что въ ней ID заключается 3 раза, и еще остается KD; слѣд.

$$CD = 3\ IB + KD.\ (2)$$

Отлагая второй остатокъ на первомъ, положимъ, что

$$IB = 2\ KD\ (3)$$

Изъ уравненія (2) $CD = 3\ IB + KD$ выведемъ, подставляя равныя величины вмѣсто равныхъ:

$$CD = 3 \times 2\ KD + KD = 7\ KD.$$

А изъ уравненія (1) $AB = 4 \times 7\ KD + 2KD = 30\ KD.$

Изъ этихъ выкладокъ слѣдуетъ, что прямая KC заключается цѣлое число разъ въ обѣихъ данныхъ прямыхъ, и посему она будетъ искомою

общею мѣрою. Изъ самаго же рѣшенія задачи видно, что отъискиваніе общей мѣры двухъ прямыхъ совершенно сходно съ отъискиваніемъ общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ.

16. Примѣчаніе. Мы здѣсь положили, что второй остатокъ заключается въ первомъ цѣлое число разъ; но можетъ быть, что и при третьемъ откладываніи получается остатокъ, и при четвертомъ и т. д. Въ такомъ случаѣ общей мѣры данныхъ двухъ прямыхъ опредѣлить нельзя, а посему и точнаго отношенія между ними найти не можно. Въ первомъ случаѣ прямыя называются *соизмѣримыми*, а во второмъ *несоизмѣримыми.*

17. Въ § 11 было сказано, что между двумя точками можно провести одну прямую, но безчисленное множество другихъ линій. Между точками (черт. 5) A и B можно представить себѣ только одну прямую AB, безчисленное множество ломанныхъ, и безчисленное множество другаго рода линій, которыхъ части не суть прямыя линіи. Послѣдняго рода линіи называются *кривыми*, которыя означаются по крайней мѣрѣ тремя буквами, изъ коихъ крайнія двѣ также поставляются подлѣ конечныхъ точекъ линіи. И такъ между точками A и B находимъ одну прямую AB, двѣ ломанныхъ ACDEB, AIB, и двѣ кривыхъ AGB и AHB.

18. Очевидно, что кривыя могутъ быть весьма различны, по своему виду и свойствамъ. Изъ нихъ въ первоначальной Геометріи разсматривается только правильнѣшая, называемая *круговою*. Эта кривая имѣетъ то свойство, что внутри ея находится точка, равноотстоящая отъ всѣхъ точекъ кривой. Эта точка (черт. 6) C называется *средоточіемъ* или *центромъ*; разстояніе CA, CB отъ центра до точекъ круговой линіи *полупоперечниками* или *радіусами*, а часть плоскости, находящейся внутри кривой линіи, *кругомъ*. Часть круговой линіи AnE называется *дугою*, а прямая AE, соединяющая конечныя точки, *хордою*.

19. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что для опредѣленія точекъ, находящихся въ равныхъ разстояніяхъ, напримѣръ=CA (фиг. 6) отъ данной точки C, стоитъ только изъ C описать круговую линію, радіусъ которой былъ бы равенъ данной прямой CA. Всѣ точки начерченной круговой будутъ въ требуемомъ разстояніи отъ точки C.

Линія, состоящая изъ кривыхъ и прямыхъ, называется *смѣшанною*, напримѣръ линія ABCDEFG (Фиг. 7).

II. О прямолинейныхъ углахъ.

20. На плоскости можно провести двѣ прямыя такъ, что онѣ по достаточномъ продолженіи встрѣтятся. Прямыя встрѣчаются въ одной точкѣ, потому что если бы онѣ (§ 13. II) имѣли двѣ или болѣе общихъ точекъ,