

УДК 519.63; 532.5; 537.364

ББК 22.25

Ж 86

Печатается по решению
кафедры вычислительной математики и математической физики
и Совета факультета математики, механики и компьютерных наук ЮФУ
от 15.09.2007

Рецензенты
Я. М. Ерусалимский, Н. В. Петровская

Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.

Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. — Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2008. — 256 с., ил.

Учебное пособие предназначено для практического освоения языка FreeFem++, используемого для численного решения задач математической физики методом конечных элементов. Содержит подробные программные коды и большой набор задач. Рекомендуются студентам факультета математики, механики и компьютерных наук ЮФУ.

© М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева, 2008

© Издательство ЮФУ

Оглавление

Часть I. Основы метода конечных элементов	11
1 Метод конечных элементов в одномерном случае	12
1.1 Сильное и слабое решение задачи	12
1.2 Построение приближенного решения задачи	14
1.2.1 Слабое решение	14
1.2.2 Метод Галеркина. Сильное решение	15
1.2.3 Конечно-разностный метод	16
1.3 Выбор базисных функций	17
1.3.1 Финитные базисные функции	19
1.3.2 Вычисление элементов матрицы A_{ik} и вектора b_i	22
1.4 Естественные и главные краевые условия	24
2 Метод конечных элементов в двумерном случае	29
2.1 Задача Дирихле для уравнения Лапласа. Слабое решение	30
2.2 Построение приближенного решения	31
Часть II. Обучение на примерах	35
3 Решение задач для уравнения Лапласа	38
3.1 Задача о стационарном распределении температуры	38
3.1.1 Постановка задачи	38
3.1.2 Слабая формулировка задачи	39
3.1.3 Слабая формулировка задачи на языке FreeFem++	41
3.1.4 Задание области D на языке FreeFem++	42
3.1.5 Полный код программы на языке FreeFem++	43
3.2 Решение задачи о распределении температуры в областях сложной формы	44
3.2.1 Решение задачи для круга	45
3.2.2 Распределение температуры в четырехугольнике	45
3.2.3 Решение задачи в криволинейной области	46
3.2.4 Решение задачи в области с отверстием	47
3.3 Физические задачи, приводящие к уравнению Лапласа	48
3.3.1 Теплопроводность	48
3.3.2 Диффузия	51
3.3.3 Электрический потенциал (электростатика)	52
3.3.4 Электрический потенциал (проводимость)	53
3.3.5 Потенциальное течение несжимаемой жидкости	54
3.3.5.1 Стационарное обтекание крыла	55
4 Решение нестационарной задачи для уравнения Лапласа	59
4.1 Постановка задачи	59
4.2 Способ построения решения	60
4.2.1 Аппроксимация производной по времени	60
4.2.2 Слабая формулировка задачи	61

4.3	Реализация алгоритма на языке FreeFem++	61
4.4	Вычислительный эксперимент	63
4.5	Общая схема аппроксимации производной по времени	64
4.6	Контроль погрешности	65
5	Уравнение переноса	69
5.1	Постановка задачи Коши для гиперболических уравнений	69
5.2	Метод характеристик	70
5.3	Метод характеристик (двумерный случай)	72
5.4	Аппроксимация уравнения переноса	74
5.5	Реализация алгоритма на языке FreeFem++	75
5.6	Вычислительный эксперимент	76
5.7	Уравнение диффузии–переноса	77
6	Уравнения реакция–диффузия. Окраска шкур животных	78
6.1	Постановка задачи	78
6.2	Слабая формулировка задачи	79
6.3	Фрагменты кодов на языке FreeFem++	80
6.4	Окраска шкур животных	81
6.4.1	Вычислительный эксперимент	82
6.4.1.1	Деформация области	84
6.4.1.2	Различные модификации кода	84
6.4.2	Реализация алгоритма на языке FreeFem++	85
7	Перенос-диффузия вихря	89
7.1	Переменные вихрь–функция тока	89
7.2	Постановка задачи	90
7.3	Алгоритм решения задачи	91
7.4	Реализация алгоритма на языке FreeFem++	92
7.5	Вычислительный эксперимент	93
7.5.1	Движение вихрей в квадратной области	93
7.5.2	Движение вихрей в круге	94
7.5.3	Периодические краевые условия. Вихри на торе	96
8	Тепловая конвекция	98
8.1	Постановка задачи	98
8.2	Алгоритм решения	99
8.2.1	Аппроксимация по времени	100
8.2.2	Метод проекций	101
8.2.3	Решение задачи Неймана	102
8.2.4	Общая схема решения задачи	103
8.3	Реализация алгоритма на языке FreeFem++	104
8.4	Вычислительный эксперимент	105
8.4.1	Теплоизолированная прямоугольная область	106
8.4.2	Теплоизолированный круг	107
8.4.3	Тепловая конвекция в «чайнике»	107
8.4.4	Тепловая конвекция в «электрочайнике»	108
8.5	Числа подобия	109
9	Различные течения жидкости	110
9.1	Задача о течении жидкости в полости	110
9.1.1	Постановка задачи	110
9.1.2	Реализация алгоритма на языке FreeFem++	111
9.1.3	Вычислительный эксперимент	112
9.2	Течение в канале	113
9.2.1	Постановка задачи	113
9.2.2	Реализация алгоритма на языке FreeFem++	115
9.2.3	Вычислительный эксперимент	117
9.2.3.1	Течение в канале Т-образной формы	117

9.2.3.2	Обтекание препятствия в канале	118
9.3	Обтекание тел жидкостью. Дорожка Кармана	119
9.3.1	Обтекание прямоугольного тела вязкой жидкостью	119
9.3.2	Обтекание круглого тела вязкой жидкостью	119
9.3.3	Вычислительный эксперимент	120
10	Перенос пассивной примеси	122
10.1	Задача о движении пассивной примеси в жидкости	122
10.2	Постановка задачи	123
10.3	Алгоритм решения задачи на языке FreeFem++	123
10.4	Вычислительный эксперимент	126
11	Перенос примеси электрическим полем	128
11.1	Основные уравнения	128
11.2	Постановка задачи	130
11.3	Алгоритм решения	131
11.4	Реализация алгоритма на языке FreeFem++	132
11.5	Бездиффузионная модель переноса	133
11.5.1	Условия на разрыве	133
11.5.2	Задача о распаде начального разрыва	134
11.6	Вычислительный эксперимент	136
11.6.1	Случай $\alpha > 0$ (увеличение σ с ростом c)	136
11.6.2	Влияние параметра α на перенос примеси	137
11.7	Метод решения задачи, не использующий оператор <code>convect</code>	138
12	Задача о движении двух примесей	140
12.1	Основные уравнения и постановка задачи	140
12.2	Реализация алгоритма решения на языке FreeFem++	141
12.3	Вычислительный эксперимент	142
12.4	Решение задачи с использованием ключевого слова <code>convect</code>	143
13	Перенос примеси электрическим полем и жидкостью	145
13.1	Постановка задачи	145
13.2	Вычислительный эксперимент	146
13.2.1	Перенос примеси жидкостью и электрическим полем	146
13.2.2	Сравнение различных типов переноса	148
14	Решение задачи со свободной границей	149
14.1	Постановка задачи	150
14.2	Код на языке FreeFem++	151
14.3	Результаты расчетов	153
15	Течение Куэтта-Тейлора между вращающимися цилиндрами	154
15.1	Постановка задачи	154
15.1.1	Функция тока	155
15.2	Алгоритм решения	156
15.2.1	Аппроксимация по времени	156
15.2.2	Проекционный метод	157
15.2.3	Слабая формулировка задачи	157
15.3	Реализация алгоритма на языке FreeFem++	158
15.4	Вычислительный эксперимент	160
Часть III. Конструкции языка FreeFem++ (краткий обзор)		161

16 Синтаксис	162
16.1 Типы данных	162
16.1.1 Основные типы данных	164
16.1.2 Глобальные переменные	165
16.2 Системные команды	166
16.3 Математические операции	166
16.4 Функции одной переменной	168
16.4.1 Встроенные функции	168
16.4.1.1 Элементарные функции	168
16.4.1.2 Случайные функции	170
16.4.1.3 Дополнительные математические функции	170
16.5 Функции двух переменных	170
16.5.1 Задание функций с помощью формул	170
16.5.2 Конечноэлементные функции	171
16.6 Оператор условного перехода	172
16.7 Циклы	172
16.7.1 Цикл с параметром	173
16.7.2 Цикл с условием	173
16.8 Операторы ввода/вывода. Файлы	174
16.9 Массивы	175
16.9.1 Одномерные массивы	175
16.9.2 Двумерные массивы с целочисленными индексами	178
16.10 Разреженные матрицы	180
16.10.1 Создание разреженной матрицы	180
16.10.2 Операции над разреженными матрицами	186
17 Генерация сеток	191
17.1 Простейшая область. Ключевое слово <code>square</code>	191
17.2 Ключевое слово <code>border</code>	192
17.3 Запись/чтение сгенерированных сеток	194
17.4 Ключевое слово « <code>triangulate</code> »	195
17.5 Ключевое слово « <code>movemesh</code> »	196
17.6 Ключевое слово « <code>adaptmesh</code> »	197
18 Конечные элементы	201
18.1 Интерполяция кусочно-линейными функциями	201
18.1.1 Барицентрические координаты	202
18.1.2 Интерполяция на треугольнике	204
18.1.3 Линии уровня	205
18.1.4 FE-функции	206
18.1.5 Кусочно-линейная интерполяция	207
18.2 Базисные функции в <code>FreeFem++</code>	209
18.2.1 P0 элементы	210
18.2.2 P1 элементы	210
18.2.3 P2 элементы	211
18.2.4 P1nc элементы	212
18.2.5 Элементы P1b и P2b	213
18.3 Векторнозначные FE-функции	214
18.3.1 RT0 элементы	215
18.4 Загружаемые конечные элементы	217
18.5 Численное интегрирование	218
18.5.1 Интегрирование по границе области	218
18.5.2 Интегрирование по области	220

19 Способы записи и решения задач в языке FreeFem++	223
19.1 Ключевые слова <code>problem</code> и <code>solve</code>	224
19.1.1 Слабая форма задачи и краевые условия	224
19.1.2 Параметры, влияющие на решение задачи	226
19.2 Вариационные формы и разреженные матрицы	227
19.3 Ключевое слово <code>maso</code>	230
20 Задачи на собственные значения	233
20.1 Функция <code>EigenValue</code>	233
20.2 Собственные значения оператора Лапласа	234
20.2.1 Задача для прямоугольника	235
20.2.2 Задача для квадрата	235
20.3 Вычислительный эксперимент	236
21 Визуализация результатов расчетов	238
21.1 Визуализация с помощью средств FreeFem++	238
21.1.1 Параметры команды <code>plot</code>	239
21.2 Визуализация с помощью программы <code>medit</code>	243
21.3 Визуализация с помощью программы <code>gnuplot</code>	244
A Установка программного обеспечения	246
A.1 Взаимодействие с текстовыми редакторами	246
B Используемые обозначения и формулы	248
C Список ключевых слов	249
Литература	250