

УДК 519.63; 532.5; 537.364

ББК 22.25

Ж 86

Печатается по решению  
кафедры вычислительной математики и математической физики  
и Совета факультета математики, механики и компьютерных наук ЮФУ  
от 15.09.2007

Рецензенты  
Я. М. Ерусалимский, Н. В. Петровская

**Жуков М. Ю., Ширяева Е. В.**

Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. — Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2008. — 256 с., ил.

Учебное пособие предназначено для практического освоения языка FreeFem++, используемого для численного решения задач математической физики методом конечных элементов. Содержит подробные программные коды и большой набор задач. Рекомендуются студентам факультета математики, механики и компьютерных наук ЮФУ.

© М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева, 2008

© Издательство ЮФУ

---

# Оглавление

<b>Часть I. Основы метода конечных элементов</b>	<b>11</b>
<b>1 Метод конечных элементов в одномерном случае</b>	<b>12</b>
1.1 Сильное и слабое решение задачи . . . . .	12
1.2 Построение приближенного решения задачи . . . . .	14
1.2.1 Слабое решение . . . . .	14
1.2.2 Метод Галеркина. Сильное решение . . . . .	15
1.2.3 Конечно-разностный метод . . . . .	16
1.3 Выбор базисных функций . . . . .	17
1.3.1 Финитные базисные функции . . . . .	19
1.3.2 Вычисление элементов матрицы $A_{ik}$ и вектора $b_i$ . . . . .	22
1.4 Естественные и главные краевые условия . . . . .	24
<b>2 Метод конечных элементов в двумерном случае</b>	<b>29</b>
2.1 Задача Дирихле для уравнения Лапласа. Слабое решение . . . . .	30
2.2 Построение приближенного решения . . . . .	31
<b>Часть II. Обучение на примерах</b>	<b>35</b>
<b>3 Решение задач для уравнения Лапласа</b>	<b>38</b>
3.1 Задача о стационарном распределении температуры . . . . .	38
3.1.1 Постановка задачи . . . . .	38
3.1.2 Слабая формулировка задачи . . . . .	39
3.1.3 Слабая формулировка задачи на языке FreeFem++ . . . . .	41
3.1.4 Задание области $D$ на языке FreeFem++ . . . . .	42
3.1.5 Полный код программы на языке FreeFem++ . . . . .	43
3.2 Решение задачи о распределении температуры в областях сложной формы	44
3.2.1 Решение задачи для круга . . . . .	45
3.2.2 Распределение температуры в четырехугольнике . . . . .	45
3.2.3 Решение задачи в криволинейной области . . . . .	46
3.2.4 Решение задачи в области с отверстием . . . . .	47
3.3 Физические задачи, приводящие к уравнению Лапласа . . . . .	48
3.3.1 Теплопроводность . . . . .	48
3.3.2 Диффузия . . . . .	51
3.3.3 Электрический потенциал (электростатика) . . . . .	52
3.3.4 Электрический потенциал (проводимость) . . . . .	53
3.3.5 Потенциальное течение несжимаемой жидкости . . . . .	54
3.3.5.1 Стационарное обтекание крыла . . . . .	55
<b>4 Решение нестационарной задачи для уравнения Лапласа</b>	<b>59</b>
4.1 Постановка задачи . . . . .	59
4.2 Способ построения решения . . . . .	60
4.2.1 Аппроксимация производной по времени . . . . .	60
4.2.2 Слабая формулировка задачи . . . . .	61

4.3	Реализация алгоритма на языке FreeFem++ . . . . .	61
4.4	Вычислительный эксперимент . . . . .	63
4.5	Общая схема аппроксимации производной по времени . . . . .	64
4.6	Контроль погрешности . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Уравнение переноса</b>	<b>69</b>
5.1	Постановка задачи Коши для гиперболических уравнений . . . . .	69
5.2	Метод характеристик . . . . .	70
5.3	Метод характеристик (двумерный случай) . . . . .	72
5.4	Аппроксимация уравнения переноса . . . . .	74
5.5	Реализация алгоритма на языке FreeFem++ . . . . .	75
5.6	Вычислительный эксперимент . . . . .	76
5.7	Уравнение диффузии–переноса . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Уравнения реакция–диффузия. Окраска шкур животных</b>	<b>78</b>
6.1	Постановка задачи . . . . .	78
6.2	Слабая формулировка задачи . . . . .	79
6.3	Фрагменты кодов на языке FreeFem++ . . . . .	80
6.4	Окраска шкур животных . . . . .	81
6.4.1	Вычислительный эксперимент . . . . .	82
6.4.1.1	Деформация области . . . . .	84
6.4.1.2	Различные модификации кода . . . . .	84
6.4.2	Реализация алгоритма на языке FreeFem++ . . . . .	85
<b>7</b>	<b>Перенос-диффузия вихря</b>	<b>89</b>
7.1	Переменные вихрь-функция тока . . . . .	89
7.2	Постановка задачи . . . . .	90
7.3	Алгоритм решения задачи . . . . .	91
7.4	Реализация алгоритма на языке FreeFem++ . . . . .	92
7.5	Вычислительный эксперимент . . . . .	93
7.5.1	Движение вихрей в квадратной области . . . . .	93
7.5.2	Движение вихрей в круге . . . . .	94
7.5.3	Периодические краевые условия. Вихри на торе . . . . .	96
<b>8</b>	<b>Тепловая конвекция</b>	<b>98</b>
8.1	Постановка задачи . . . . .	98
8.2	Алгоритм решения . . . . .	99
8.2.1	Аппроксимация по времени . . . . .	100
8.2.2	Метод проекций . . . . .	101
8.2.3	Решение задачи Неймана . . . . .	102
8.2.4	Общая схема решения задачи . . . . .	103
8.3	Реализация алгоритма на языке FreeFem++ . . . . .	104
8.4	Вычислительный эксперимент . . . . .	105
8.4.1	Теплоизолированная прямоугольная область . . . . .	106
8.4.2	Теплоизолированный круг . . . . .	107
8.4.3	Тепловая конвекция в «чайнике» . . . . .	107
8.4.4	Тепловая конвекция в «электрочайнике» . . . . .	108
8.5	Числа подобия . . . . .	109
<b>9</b>	<b>Различные течения жидкости</b>	<b>110</b>
9.1	Задача о течении жидкости в полости . . . . .	110
9.1.1	Постановка задачи . . . . .	110
9.1.2	Реализация алгоритма на языке FreeFem++ . . . . .	111
9.1.3	Вычислительный эксперимент . . . . .	112
9.2	Течение в канале . . . . .	113
9.2.1	Постановка задачи . . . . .	113
9.2.2	Реализация алгоритма на языке FreeFem++ . . . . .	115
9.2.3	Вычислительный эксперимент . . . . .	117
9.2.3.1	Течение в канале Т-образной формы . . . . .	117

9.2.3.2	Обтекание препятствия в канале . . . . .	118
9.3	Обтекание тел жидкостью. Дорожка Кармана . . . . .	119
9.3.1	Обтекание прямоугольного тела вязкой жидкостью . . . . .	119
9.3.2	Обтекание круглого тела вязкой жидкостью . . . . .	119
9.3.3	Вычислительный эксперимент . . . . .	120
<b>10</b>	<b>Перенос пассивной примеси</b>	<b>122</b>
10.1	Задача о движении пассивной примеси в жидкости . . . . .	122
10.2	Постановка задачи . . . . .	123
10.3	Алгоритм решения задачи на языке FreeFem++ . . . . .	123
10.4	Вычислительный эксперимент . . . . .	126
<b>11</b>	<b>Перенос примеси электрическим полем</b>	<b>128</b>
11.1	Основные уравнения . . . . .	128
11.2	Постановка задачи . . . . .	130
11.3	Алгоритм решения . . . . .	131
11.4	Реализация алгоритма на языке FreeFem++ . . . . .	132
11.5	Бездиффузионная модель переноса . . . . .	133
11.5.1	Условия на разрыве . . . . .	133
11.5.2	Задача о распаде начального разрыва . . . . .	134
11.6	Вычислительный эксперимент . . . . .	136
11.6.1	Случай $\alpha > 0$ (увеличение $\sigma$ с ростом $c$ ) . . . . .	136
11.6.2	Влияние параметра $\alpha$ на перенос примеси . . . . .	137
11.7	Метод решения задачи, не использующий оператор <code>convect</code> . . . . .	138
<b>12</b>	<b>Задача о движении двух примесей</b>	<b>140</b>
12.1	Основные уравнения и постановка задачи . . . . .	140
12.2	Реализация алгоритма решения на языке FreeFem++ . . . . .	141
12.3	Вычислительный эксперимент . . . . .	142
12.4	Решение задачи с использованием ключевого слова <code>convect</code> . . . . .	143
<b>13</b>	<b>Перенос примеси электрическим полем и жидкостью</b>	<b>145</b>
13.1	Постановка задачи . . . . .	145
13.2	Вычислительный эксперимент . . . . .	146
13.2.1	Перенос примеси жидкостью и электрическим полем . . . . .	146
13.2.2	Сравнение различных типов переноса . . . . .	148
<b>14</b>	<b>Решение задачи со свободной границей</b>	<b>149</b>
14.1	Постановка задачи . . . . .	150
14.2	Код на языке FreeFem++ . . . . .	151
14.3	Результаты расчетов . . . . .	153
<b>15</b>	<b>Течение Куэтта-Тейлора между вращающимися цилиндрами</b>	<b>154</b>
15.1	Постановка задачи . . . . .	154
15.1.1	Функция тока . . . . .	155
15.2	Алгоритм решения . . . . .	156
15.2.1	Аппроксимация по времени . . . . .	156
15.2.2	Проекционный метод . . . . .	157
15.2.3	Слабая формулировка задачи . . . . .	157
15.3	Реализация алгоритма на языке FreeFem++ . . . . .	158
15.4	Вычислительный эксперимент . . . . .	160
<b>Часть III. Конструкции языка FreeFem++ (краткий обзор)</b>		<b>161</b>

<b>16 Синтаксис</b>	<b>162</b>
16.1 Типы данных . . . . .	162
16.1.1 Основные типы данных . . . . .	164
16.1.2 Глобальные переменные . . . . .	165
16.2 Системные команды . . . . .	166
16.3 Математические операции . . . . .	166
16.4 Функции одной переменной . . . . .	168
16.4.1 Встроенные функции . . . . .	168
16.4.1.1 Элементарные функции . . . . .	168
16.4.1.2 Случайные функции . . . . .	170
16.4.1.3 Дополнительные математические функции . . . . .	170
16.5 Функции двух переменных . . . . .	170
16.5.1 Задание функций с помощью формул . . . . .	170
16.5.2 Конечноэлементные функции . . . . .	171
16.6 Оператор условного перехода . . . . .	172
16.7 Циклы . . . . .	172
16.7.1 Цикл с параметром . . . . .	173
16.7.2 Цикл с условием . . . . .	173
16.8 Операторы ввода/вывода. Файлы . . . . .	174
16.9 Массивы . . . . .	175
16.9.1 Одномерные массивы . . . . .	175
16.9.2 Двумерные массивы с целочисленными индексами . . . . .	178
16.10 Разреженные матрицы . . . . .	180
16.10.1 Создание разреженной матрицы . . . . .	180
16.10.2 Операции над разреженными матрицами . . . . .	186
<b>17 Генерация сеток</b>	<b>191</b>
17.1 Простейшая область. Ключевое слово <code>square</code> . . . . .	191
17.2 Ключевое слово <code>border</code> . . . . .	192
17.3 Запись/чтение сгенерированных сеток . . . . .	194
17.4 Ключевое слово « <code>triangulate</code> » . . . . .	195
17.5 Ключевое слово « <code>movemesh</code> » . . . . .	196
17.6 Ключевое слово « <code>adaptmesh</code> » . . . . .	197
<b>18 Конечные элементы</b>	<b>201</b>
18.1 Интерполяция кусочно-линейными функциями . . . . .	201
18.1.1 Барицентрические координаты . . . . .	202
18.1.2 Интерполяция на треугольнике . . . . .	204
18.1.3 Линии уровня . . . . .	205
18.1.4 FE-функции . . . . .	206
18.1.5 Кусочно-линейная интерполяция . . . . .	207
18.2 Базисные функции в <code>FreeFem++</code> . . . . .	209
18.2.1 P0 элементы . . . . .	210
18.2.2 P1 элементы . . . . .	210
18.2.3 P2 элементы . . . . .	211
18.2.4 P1nc элементы . . . . .	212
18.2.5 Элементы P1b и P2b . . . . .	213
18.3 Векторнозначные FE-функции . . . . .	214
18.3.1 RT0 элементы . . . . .	215
18.4 Загружаемые конечные элементы . . . . .	217
18.5 Численное интегрирование . . . . .	218
18.5.1 Интегрирование по границе области . . . . .	218
18.5.2 Интегрирование по области . . . . .	220

---

<b>19 Способы записи и решения задач в языке FreeFem++</b>	<b>223</b>
19.1 Ключевые слова <code>problem</code> и <code>solve</code> . . . . .	224
19.1.1 Слабая форма задачи и краевые условия . . . . .	224
19.1.2 Параметры, влияющие на решение задачи . . . . .	226
19.2 Вариационные формы и разреженные матрицы . . . . .	227
19.3 Ключевое слово <code>masco</code> . . . . .	230
<b>20 Задачи на собственные значения</b>	<b>233</b>
20.1 Функция <code>EigenValue</code> . . . . .	233
20.2 Собственные значения оператора Лапласа . . . . .	234
20.2.1 Задача для прямоугольника . . . . .	235
20.2.2 Задача для квадрата . . . . .	235
20.3 Вычислительный эксперимент . . . . .	236
<b>21 Визуализация результатов расчетов</b>	<b>238</b>
21.1 Визуализация с помощью средств FreeFem++ . . . . .	238
21.1.1 Параметры команды <code>plot</code> . . . . .	239
21.2 Визуализация с помощью программы <code>medit</code> . . . . .	243
21.3 Визуализация с помощью программы <code>gnuplot</code> . . . . .	244
<b>A Установка программного обеспечения</b>	<b>246</b>
A.1 Взаимодействие с текстовыми редакторами . . . . .	246
<b>B Используемые обозначения и формулы</b>	<b>248</b>
<b>C Список ключевых слов</b>	<b>249</b>
<b>Литература</b>	<b>250</b>