МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

В.П. Орлов

МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

Учебно-методическое пособие для вузов

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2012

Содержание

будет решена задача, в которой рассматривается одна из модификаций игры «Музыкальные стулья».

В разделе «Арбитражная схема Нэша» вводится новый класс игр $(N,\ S,\ v^0)$ (так называемые игры с переговорами) где N - множество игроков, S - переговорное множество, v^0 - вектор максиминных выигрышей игроков. и исследуется принцип оптимальности, позволяющий найти арбитражное решение (вектор выигрышей) одной из таких игр. В качестве приложения данного принципа будет найдено арбитражное решение биматричной (2×2)-игры.

2. Основные понятия.

2.1. Бескоалиционные игры.

Пусть заданы непустые множества X_i, где $i = 1, \ldots, n$. Рассмотрим множество $X = X_1 \times \ldots \times X_n$, то есть $X = \{x = (x_1, \ldots, x_n) |\ x_i \in X_i,\ i = 1, \ldots, n\}$. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ определим функцию $H_i : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to R^1$.

Процесс бескоалиционной игры кратко можно описать следующим образом. Участники игры независимо друг от друга выбирают стратегии $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$. В результате в игре складывается набор стратегий $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$, называемый ситуацией, и i-й игрок получает выигрыш $H_i(x)$. В качестве исхода игры рассматривается вектор $H(x) = (H_1(x), \ldots, H_n(x))$. При этом игрок i предпочитает ситуации x ситуацию x' тогда и только тогда, когда $H_i(x') > H_i(x)$. Если $H_i(x') = H_i(x)$, то ситуации x и x' для игрока i равноценны.

Определение 2.1. *Система*

$$\Gamma = (N,\ \{X_i\}_{i \in N},\ \{H_i\}_{i \in N}),$$

в которой $N = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ - множество игроков, X_i - множество стратегий игрока i, H_i - функция выигрыша игрока i, определённая на декартовом произведении множеств стратегий игроков $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ (множество ситуаций игры), называется бескоалиционной игрой.

Рассмотрим теперь частные случаи бескоалиционной игры n лиц.

Определение 2.2. *Если множества стратегий игроков X_i, где $i \in \{1, \ldots, n\}$ конечны, то игра называется конечной бескоалиционной игрой n лиц.*

Определение 2.3. *Бескоалиционная игра* Γ, *в которой принимают участие два игрока, называется игрой двух лиц* ($\Gamma = (X_1,\ X_2,\ H_1,\ H_2)$).

Определение 2.4. *Конечная бескоалиционная игра двух лиц называется биматричной.*

При этом удобно считать, что ($X_1 = \{1,\ \ldots,\ m\}, \quad X_2 = \{1,\ \ldots,\ n\}$), а функции H_1 и H_2 записываются в виде матриц

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \ldots & \beta_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{m1} & \ldots & \beta_{mn} \end{bmatrix}.$$

Здесь элементы $\alpha_{ij} = H_1(i,j)$ и $\beta_{ij} = H_2(i,j)$ матриц A и B являются соответственно выигрышами игроков 1 и 2 в ситуации $(i,\ j), \quad i \in X_1,\ j \in X_2$.

Биматричную игру удобно представлять так: игрок 1 выбирает номер i-й строки матрицы A, а игрок 2 (одновременно и независимо) - номер j-го столбца матрицы B. В результате в игре образуется ситуация $(i,\ j)$, причём игрок 1 получает выигрыш α_{ij}, а игрок 2 - выигрыш β_{ij}.

Часто биматричную игру записывают в виде

$$(A,B) = \begin{bmatrix} (\alpha_{11},\beta_{11}) & \ldots & (\alpha_{1n},\beta_{1n}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\alpha_{m1},\beta_{m1}) & \ldots & (\alpha_{mn},\beta_{mn}) \end{bmatrix}.$$

Если $H_2 = -H_1$, или, что то же, $B = -A$, то игра становится антагонистической и называется матричной. Матричная игра целиком определяется матрицей A.

Перейдем к изложению основных понятий теории матричных игр.