МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

# МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*Учебно-методическое пособие*

Составитель

П.В. Садчиков

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2017

## ВВЕДЕНИЕ

В данном пособии излагается суть метода характеристик решения уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными, дается подробный алгоритм приведения к каноническому виду уравнений второго порядка разных типов, рассматривается задача Коши для уравнения гиперболического типа. Пособие содержит краткое теоретическое обоснование, примеры решения задач и контрольные задания, используемые на практических занятиях.

# ПРИМЕРЫ ПРИВЕДЕНИЯ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**Пример 1.** Привести к каноническому виду уравнение

$u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0$.

**Решение.** Так как $b^2 - ac = \cos^2 x + 3 + \sin^2 x = 4$, то исходное уравнение принадлежит гиперболическому типу. Составим уравнения характеристик:

$$ady - (b + \sqrt{b^2 - ac})dx = dy - (-\cos x + 2)dx = 0$$

$$ady - (b - \sqrt{b^2 - ac})dx = dy - (-\cos x - 2)dx = 0.$$

Проинтегрируем данные уравнения и получим

$$2x - \sin x - y = c_1,$$
$$2x + \sin x + y = c_2.$$

Введем новые независимые переменные

$$\xi = 2x - \sin x - y,$$

$$\eta = 2x + \sin x + y.$$

Пересчитаем производные, входящие в исходное уравнение:

$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = (2 - \cos x)u_\xi + (2 + \cos x)u_\eta$;

$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = -u_\xi + u_\eta$;

$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x{}^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x{}^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} = (2 - \cos x)^2 u_{\xi\xi} +$
$+2(2 - \cos x)(2 + \cos x)u_{\xi\eta} + (2 + \cos x)^2 u_{\eta\eta} + \sin x u_\xi - \sin x u_\eta$;

$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y{}^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y{}^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy} = u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$;

$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} = -(2 - \cos x)u_{\xi\xi} -$
$-2\cos x u_{\xi\eta} + (2 + \cos x)u_{\eta\eta}$.

Подставим полученные выражения в исходное уравнение:

$$u_{xx}-2\cos x u_{xy}-(3+\sin^2 x)u_{yy}-yu_y=(2-\cos x)^2 u_{\xi\xi}+$$
$$+2(2-\cos x)(2+\cos x)u_{\xi\eta}+(2+\cos x)^2 u_{\eta\eta}+\sin x u_\xi-\sin x u_\eta-$$
$$-2\cos x(-(2-\cos x)u_{\xi\xi}-2\cos x u_{\xi\eta}+(2+\cos x)u_{\eta\eta})-$$
$$-(3+\sin^2 x)(u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta})-y(-u_\xi+u_\eta)=$$
$$=16u_{\xi\eta}+(\sin x+y)u_\xi-(\sin x+y)u_\eta=16u_{\xi\eta}+(\sin x+y)(u_\xi-u_\eta).$$

Зная, что $\xi=2x-\sin x-y$, $\eta=2x+\sin x+y$, находим $\sin x+y=\dfrac{\eta-\xi}{2}$. Следовательно, канонический вид исходного уравнения:

$$u_{\xi\eta}+\frac{\eta-\xi}{32}(u_\xi-u_\eta)=0.$$

**Пример 2.** Привести к каноническому виду уравнение
$y^2u_{xx}+2xyu_{xy}+2x^2u_{yy}-yu_y=0$.

**Решение.** Определим тип уравнения: $b^2-ac=x^2y^2-2x^2y^2=-x^2y^2<0$. Следовательно, уравнение принадлежит эллиптическому типу. Составим уравнение характеристик:

$$y^2dy-(xy+ixy)dx=0,$$

$$ydy-(x+ix)dx=0.$$

Получим общий интеграл последнего уравнения: $x^2-y^2+ix^2=c$.

Таким образом, новые независимые переменные будут выглядеть следующим образом: $\xi=x^2-y^2$, $\eta=x^2$.

Посчитаем частные производные:

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x=2xu_\xi+2xu_\eta;$$

$$u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y=-2yu_\xi;$$

$$u_{xx}=u_{\xi\xi}\xi_x^{\ 2}+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^{\ 2}+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx}=4x^2u_{\xi\xi}+8x^2u_{\xi\eta}+4x^2u_{\eta\eta}+$$
$$+2u_\xi+2u_\eta;$$
$$u_{yy}=u_{\xi\xi}\xi_y^{\ 2}+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^{\ 2}+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy}=4y^2u_{\xi\xi}-2u_\xi;$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy} = -4xyu_{\xi\xi} - 4xyu_{\xi\eta}.$$

Подставим полученные выражения в исходное уравнение:

$$y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2u_{yy} - yu_y = y^2(4x^2u_{\xi\xi} + 8x^2u_{\xi\eta} + 4x^2u_{\eta\eta} + 2u_\xi + 2u_\eta) +$$
$$+2xy(-4xyu_{\xi\xi} - 4xyu_{\xi\eta}) + 2x^2(4y^2u_{\xi\xi} - 2u_\xi) + y(-2yu_\xi) = 4x^2y^2u_{\xi\xi} +$$
$$+4x^2y^2u_{\eta\eta} - 4x^2u_\xi + 2y^2u_\eta.$$

Очевидно, что $y^2 = \eta - \xi$, $x^2 = \eta$. Значит, канонический вид исходного уравнения:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{\xi - \eta}u_\xi + \frac{1}{2\eta}u_\eta = 0.$$

**Пример 3.** Привести к каноническому виду уравнение

$$\operatorname{tg}^2 xu_{xx} - 2y\operatorname{tg} xu_{xy} + y^2u_{yy} + \operatorname{tg}^3 xu_x = 0.$$

**Решение.** Так как $b^2 - ac = y^2\operatorname{tg}^2 x - y^2\operatorname{tg}^2 x = 0$, то исходное уравнение принадлежит параболическому типу. Уравнение характеристик выглядит следующим образом:

$$\operatorname{tg}^2 xdy + y\operatorname{tg} xdx = 0,$$

или

$$\operatorname{tg} xdy + ydx = 0.$$

Проинтегрируем данное уравнение и получим:

$$\ln|y| + \ln|\sin x| = c.$$

Положим $\xi = y\sin x$. В качестве второй функции возьмем функцию $\eta = y$, обеспечивающую отличие от нуля якобиана преобразования $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$.

Пересчитаем частные производные:

$$u_x = u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x = y\cos xu_\xi;$$

$$u_y = u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y = \sin xu_\xi + u_\eta;$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^{\ 2} + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^{\ 2} + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx} = y^2\cos^2 x u_{\xi\xi} - y\sin x u_\xi;$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^{\ 2} + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^{\ 2} + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy} = \sin^2 x u_{\xi\xi} + 2\sin x u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta};$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy} = y\sin x\cos x u_{\xi\xi} +$$
$$+ y\cos x u_{\xi\eta} + \cos x u_\xi.$$

Подставим полученные выражения в исходное уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x u_{xx} - 2y\operatorname{tg} x u_{xy} + y^2 u_{yy} + \operatorname{tg}^3 x u_x = \operatorname{tg}^2 x(y^2\cos^2 x u_{\xi\xi} - y\sin x u_\xi) -$$
$$-2y\operatorname{tg} x(y\sin x\cos x u_{\xi\xi} + y\cos x u_{\xi\eta} + \cos x u_\xi) + y^2(\sin^2 x u_{\xi\xi} + 2\sin x u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) +$$
$$+\operatorname{tg}^3 x y\cos x u_\xi = y^2 u_{\eta\eta} - 2y\sin x u_\xi.$$

Зная, что $\xi = y\sin x$, $\eta = y$, находим канонический вид уравнения:

$$u_{\eta\eta} - \frac{2\xi}{\eta^2}u_\xi = 0.$$

## МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК

Метод приведения уравнения второго порядка (1) к каноническому виду и решение полученного при этом уравнения носит название *метода характеристик*. Рассмотрим пример решения уравнения параболического типа.

**Пример 4.** Найти общее решение уравнения:

$$x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y = 0.$$

**Решение.** Заданное уравнение имеет параболический тип (так как дискриминант уравнения равен нулю: $b^2 - ac = x^2y^2 - x^2y^2 = 0$) и заменой:

$$\xi = xy,\ \eta = x,\ u(x,y) = v(\xi,\eta) \qquad (5)$$

приводится к виду:

$$\eta v_{\eta\eta} + v_\eta = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(\eta v_\eta) = 0.$$

Проинтегрируем последнее равенство и получим

$$\eta v_\eta = \varphi_1(\xi)$$

или

$$v_\eta = \frac{\varphi_1(\xi)}{\eta},$$

где $\varphi_1(\xi)$ – произвольная функция. Проинтегрировав еще раз, получим

$$v(\xi,\eta) = \varphi_1(\xi)\ln\eta + \varphi_2(\xi), \tag{6}$$

где $\varphi_2(\xi)$ – произвольная функция.

В равенстве (6) вернемся к старым переменным, учитывая замену (5). В результате получим общее решение заданного уравнения:

$$u(x,y) = \varphi_1(xy)\ln x + \varphi_2(xy),$$

где $\varphi_1$, $\varphi_2$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

## ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Задача Коши для уравнения (1) с условиями

$$u\big|_\Gamma = u_0(x,y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_\Gamma = u_1(x,y) \tag{7}$$

состоит в следующем. Пусть в области $D$ задано уравнение (1) гиперболического типа и на кривой $\Gamma$, которая принадлежит области $D$ или является частью границы области $D$, заданы функции $u_0(x,y)$, $u_1(x,y)$ и направление $l(x,y)$. Требуется найти функцию $u(x,y)$, которая в области $D$ является решением уравнения (1) и на кривой $\Gamma$ удовлетворяет условиям (7).