ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2017, том 475, № 6, с. 605–608

МАТЕМАТИКА

УДК 517.958

О ТОЧНОСТИ АПОСТЕРИОРНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ МАЖОРАНТ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЁННЫХ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2017 г. В. Г. Корнеев

Представлено академиком РАН А.Н. Коноваловым 22.03.2017 г.

Поступило 22.03.2017 г.

В сообщении получена новая апостериорная функциональная мажоранта погрешности приближённых решений эллиптического уравнения порядка $2n$, $n \geq 1$, с произвольным неотрицательным постоянным коэффициентом $\sigma \geq 0$ в младшем члене вида σu, где u – решение уравнения. Она существенно уточняет известную мажоранту Обэна, которая теряет смысл при $\sigma \equiv 0$ и огрубляет оценку погрешности при σ из значительной окрестности нуля, а также другие мажоранты, полученные в последние десятилетия для случая $\sigma \equiv 0$. Показано, что при применении к решениям метода конечных элементов на квазиоднородных сетках новая апостериорная мажоранта неулучшаема по порядку точности, совпадающему с порядком точности неулучшаемых априорных оценок погрешности.

DOI: 10.7868/S086956521724001X

Для контроля погрешности приближённых решений уравнений в частных производных и построения адаптивных алгоритмов применяются апостериорные оценки погрешности. Такие оценки должны быть достаточно точными и иметь линейную или близкую к линейной вычислительную сложность. В связи с первым требованием естественно ожидать, что апостериорная оценка должна быть согласованной, т.е. иметь одинаковый порядок точности с неулучшаемой априорной оценкой. Апостериорными функциональными мажорантами погрешности называют оценки, обладающие значительной общностью и иногда другими положительными свойствами. Наиболее ранняя мажоранта такого типа была предложена Ж.-П. Обэном [1]. Для приближенных решений задачи (4) в условиях теоремы 1 она имеет вид (6), причём $\Theta = 1$ и $\theta = \dfrac{1}{\sigma}$ для всех $\sigma > 0$. Очевидно, при $\sigma \to 0$ точность мажоранты ухудшается и при $\sigma = 0$ она утрачивает смысл.

Пусть для простоты u – решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона $-\Delta u + \sigma u = f(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, $u\,|_{\partial\Omega} = 0$, в области с липшицевой границей. При $\sigma \equiv 0$ для погрешности его приближений в [2] получена мажоранта $(\forall \varepsilon > 0)$

$$\|\nabla(v-u)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq (1+\varepsilon)\,\|\nabla v + \mathbf{z}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + {} + c_\Omega\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\|\nabla\cdot\mathbf{z} - f\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^m$, v и $\mathbf{z}$ – произвольные функция и вектор-функция из $H^1_0(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega):\ v\,|_{\partial\Omega} = 0\}$ и $\mathbf{H}(\Omega, \mathrm{div}) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{L}^2(\Omega):\ \mathrm{div}\,\mathbf{y} \in L^2(\Omega)\}$, соответственно, а c_Ω – постоянная из неравенства Фридрихса. В [3, 4] для повышения точности вектор $\mathbf{z}$ находился путём корректировки произвольного вектора $\mathbf{y}$, в частности приближённого вектора потока $\mathbf{y} = \nabla v$ до вектора, точно удовлетворяющего уравнению баланса. В результате в оценке типа (1) выражение под знаком первой нормы правой части упрощалось или обращалось в ноль, а под знаком второй нормы оказывалась сумма одномерных интегралов от невязки. В случае $\sigma = \mathrm{const} \geq 0$, если обозначить $\|\cdot\|^2 = |\cdot|^2_{H^1(\Omega)} + \sigma\|\cdot\|^2_{L^2(\Omega)}$, то согласно [5]

$$\|v-u\|^2 \leq (1+\varepsilon)\|\nabla v + \mathbf{z}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + {} + \frac{1}{\sigma + \dfrac{\varepsilon}{c_\Omega(1+\varepsilon)}}\|f - \sigma v - \mathrm{div}\,\mathbf{z}\|^2_{L^2(\Omega)}. \qquad (2)$$

Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: vad.korneev2011@yandex.ru

Попытки улучшить мажоранту Ж.-П. Обэна, чтобы она обеспечивала приемлемую точность при всех $\sigma \geq 0$, делались и в других работах, см. [6].

Перечисленные мажоранты успешно применялись при численном решении некоторых задач. Тем не менее они, как и некоторые другие мажоранты для случаев уравнений 2-го и 4-го порядков, включая уравнения с $\sigma \geq 0$ из некоторой (достаточно большой, как будет видно из дальнейшего) окрестности нуля, не относятся к классу согласованных. При этом огрубление ими погрешности решений, например, м.к.э. (метода конечных элементов) может быть значительным: для решений эллиптических уравнений порядка $2n$ в $\mathcal{O}(h^{-n})$ раз. Цель настоящей работы – получить более точные согласованные апостериорные мажоранты погрешности, порядки точности которых такие же, как в неулучшаемых априорных оценках. Например, из излагаемых результатов вытекает, что при использовании линейных конечных элементов и при $f \in L^2(\Omega)$ множитель в (1) перед второй нормой справа должен иметь вид ch^2, $c = \text{const}$, если принять, например, $\varepsilon = 1$.

Пусть $D^{\mathbf{q}}v = \partial^{|\mathbf{q}|}v/\partial x_1^{q_1}\,\partial x_2^{q_2}\ldots\partial x_m^{q_m}$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_m)$, $m \leq 3$, и q_k – целые неотрицательные числа, $|\mathbf{q}| = q_1 + q_2 + \ldots + q_m$, $\mathbf{A} = \{a_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(x)\}_{|\mathbf{q}|,|\mathbf{p}|=n}$ – симметричная матрица с коэффициентами $a_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(x) \in L^\infty(\Omega)$, равномерно положительно определённая на $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$, $\partial\Omega$ – граница области Ω. Границу $\partial\Omega$ и коэффициенты $a_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$ везде, где нет уточнений, предполагаем достаточно гладкими. Коффициенты векторов (вектор-функций) $\mathbf{y} = \{y^{(\mathbf{p})}\}_{|\mathbf{p}|=n}$ упорядочим так, что $\{\mathbf{A}\mathbf{y}\}^{(\mathbf{q})} = \sum\limits_{|\mathbf{p}|=n} a_{\mathbf{q},\mathbf{p}}\, y^{(\mathbf{p})}$, и введём дифференциальные операторы $\mathcal{D}, \mathcal{D}^*$ и $\mathcal{L}$ посредством выражений

$$\mathcal{D}v = \{D^{\mathbf{p}}v\}_{|p|=n}, \quad \mathcal{D}^*\mathbf{y} = \sum_{|\mathbf{q}|=n} (-1)^{|\mathbf{q}|} D^{\mathbf{q}} y^{(\mathbf{q})},$$

$$\mathcal{L}w = \mathcal{D}^*\mathbf{A}\mathcal{D}w = \sum_{|\mathbf{q}|,|\mathbf{p}|=n} (-1)^{|\mathbf{q}|} D^{\mathbf{q}}\left(a_{\mathbf{q},\mathbf{p}} D^{\mathbf{p}} w\right).$$

Последний из них ассоциирован с билинейной формой $a(w, v)$ формулой Грина

$$a(w, v) \overset{\text{def}}{=} \sum_{|\mathbf{q}|,|\mathbf{p}|=n} \int_\Omega a_{\mathbf{q},\mathbf{p}} (D^{\mathbf{p}}w) D^{\mathbf{q}}v\,dx =$$

$$= (\mathcal{L}\, w, v)_\Omega + \sum_{0 \leq i \leq n-1} (\kappa_i w, \gamma_i v)_{\partial\Omega}, \tag{3}$$

в которой γ_k и κ_k – дифференциальные операторы порядков k и $2n - k - 1$, соответствующие существенным и естественным краевым условиям для оператора $\mathcal{L}$, а $(w, v)_\Omega = \int\limits_\Omega wv\,dx$, и $(w, v)_{\partial\Omega} = \int\limits_{\partial\Omega} wv\,ds$. Мы опускаем описания операторов κ_k и соответствующих им операторов β_k, $\kappa_k u = \beta_k \mathbf{A}\mathcal{D}u$, которые можно найти в [1, 7]. Далее используются кроме того пространства С.Л. Соболева $H^k(\Omega) = W_2^k(\Omega)$, пространства $H^n(\Omega, \mathcal{L}) = \left\{w \in H^n(\Omega) : \mathcal{L}w \in L^2(\Omega)\right\}$, $\mathbf{H}(\Omega, \mathcal{D}^*) = \left\{\mathbf{y} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \mathcal{D}^*\mathbf{y} \in L^2(\Omega)\right\}$ и нормы

$$\| u \| = \left(\|u\|_a^2 + \sigma\|u\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2}, \quad \|u\|_a^2 = a(u,u),$$

$$0 \leqslant \sigma = \text{const},$$

$$]\!|\, \mathbf{y} \,|\![= [\mathbf{y}, \mathbf{y}]_\Omega^{1/2}, \quad]\!|\, \mathbf{y} \,|\![_{\mathbf{A}} = [\mathbf{y}, \mathbf{A}\mathbf{y}]_\Omega^{1/2},$$

$$[\mathbf{y}, \mathbf{z}]_\Omega = \int_\Omega \mathbf{y}^\top \mathbf{z}\,dx.$$

В качестве модельной рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}u + \sigma u = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m; \\ &\gamma_k u\,|_{\partial\Omega} = \psi_k, \quad 0 \leq k \leq j; \\ &\kappa_k\, u\,|_{\partial\Omega} = \psi_k, \quad j + 1 \leq k \leq n - 1, \end{aligned} \tag{4}$$

со смешанными краевыми условиями, считая для простоты $j \geq 1$.

Если $v \in H_0^n(\Omega) = \{v \in H^n(\Omega) : \gamma_k u\,|_{\partial\Omega} = \psi_k,\ 0 \leq k \leq j\}$ – какое-либо приближение решения задачи $u \in H_0^n(\Omega)$, то под σ_* понимаем величину в неравенстве

$$\frac{\| u - v \|_{L^2(\Omega)}^2}{\| u - v \|_a^2} \leq \sigma_*^{-1}. \tag{5}$$

Теорема 1. Пусть $u \in H_0^n(\Omega, \mathcal{L})$ – *решение краевой задачи* (4), v – *произвольная функция из пространства* $H_0^n(\Omega)$ *и* $\mathbf{z} \in \mathbf{H}(\Omega, \mathcal{D}^*)$ – *произвольная вектор-функция, удовлетворяющая краевым условиям* $\beta_k \mathbf{z}\,|_{\partial\Omega} = \psi_k$ *для* $j + 1 \leq k \leq n - 1$. *Тогда при любом* $\sigma \geq 0$ *выполняется оценка*

$$\| v - u \|^2 \leq \mathcal{M}(\sigma, \sigma_*, f, v, \mathbf{z}) =$$

$$= \Theta\left[\,]\!|\, \mathbf{A}\mathcal{D}v - \mathbf{z} \,|\![_{\mathbf{A}^{-1}}^2 + \theta\, \| f - \sigma v - \mathcal{D}^*\mathbf{z} \|_{L^2(\Omega)}^2\right], \tag{6}$$

в которой Θ *и* θ *суть непрерывные функции от* $\kappa = \dfrac{\sigma}{\sigma_*}$ *вида*

$$\Theta = \begin{cases} \dfrac{2}{1 + \kappa}, & \sigma \in [0, \sigma_*], \\ 1, & \sigma > \sigma_*; \end{cases}$$

$$\theta = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma_*}, & \sigma \in [0, \sigma_*], \\ \dfrac{1}{\sigma}, & \sigma > \sigma_*. \end{cases} \qquad (7)$$

В основе доказательства лежат формула Грина (3) при краевых условиях (4), равенство $\mathcal{L}w = \mathcal{D}^*\mathbf{A}\mathcal{D}w$ и неравенство Коши $a_1b_1 + a_2b_2 \le (a_1^2 + \varepsilon^{-1}a_2^2)^{1/2}(b_1^2 + \varepsilon b_2^2)^{1/2}$ для любых $a_k, b_k \ge 0$ и $\varepsilon > 0$. Для погрешности $e = v - u$ они позволяют получить

$$\begin{aligned} \| e \|^2 &= a(e,e) + \sigma(e,e)_\Omega = \\ &= [\mathcal{D}e, \mathbf{A}\mathcal{D}v - \mathbf{z} + \mathbf{z} - \mathbf{A}\mathcal{D}u]_\Omega + \\ &+ \sigma(e,e)_\Omega = [\mathbf{A}\mathcal{D}e, \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\mathcal{D}v - \mathbf{z})]_\Omega + \\ &+ (e, \mathcal{D}^*(\mathbf{z} - \mathbf{A}\mathcal{D}u))_\Omega + \sigma(e,e)_\Omega = \\ &= [\mathbf{A}\mathcal{D}e, \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\mathcal{D}v - \mathbf{z})]_\Omega + (e, (\sigma v + \mathcal{D}^*\mathbf{z} - f))_\Omega \le \\ &\le \{a(e,e) + \varepsilon(e,e)_\Omega\}^{1/2} \Big\{ \| \mathbf{A}\mathcal{D}v - \mathbf{z} \|^2_{\mathbf{A}^{-1}} + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \| f - \sigma v - \mathcal{D}^*\mathbf{z} \|^2_{L^2(\Omega)} \Big\}^{1/2}. \end{aligned} \qquad (8)$$

Из (8) при $\varepsilon = \sigma$ непосредственно следует оценка Обэна, совпадающая с оценкой (6), (7) для $\sigma \ge \sigma_*$, см. [1, теоремы 10.1.4, 10.1.6]. Для значений $\sigma \le \sigma_*$ полагаем $\epsilon = \sigma_*$, что при $\beta \in (0, 1]$ с помощью (5) приводит к оценке

$$\begin{aligned} &\| u - v \|_a^2 + \sigma_* \| u - v \|^2_{L^2(\Omega)} \le \\ &\le \left[1 + (\sigma_* - \sigma)\frac{\beta}{\sigma_*} \right] \| u - v \|_a^2 + \\ &+ [(1 - \beta)(\sigma_* - \sigma) + \sigma] \| u - v \|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \qquad (9)$$

Оценки (8) и (9) при $\beta = \dfrac{1}{1 + \kappa}$ подтверждают справедливость оценки (6), (7) для $\sigma \le \sigma_*$.

Сформулируем несколько дополнительных условий:

А) в (4) $j = n - 1$ $\psi_k \equiv 0$ для $k = 0, 1, \ldots, n - 1$;

Б) область Ω и матрица $\mathbf{A}$ таковы, что при $\sigma \equiv 0$ $\forall f \in L^2(\Omega)$ задача (4) имеет решение $u \in H^{2n}(\Omega)$ и $\| u \|_{H^{2n}(\Omega)} \le c_\circ \| f \|_{L^2(\Omega)}$, $c_\text{o} = c_\text{o}(\mathbf{A}, \Omega) = \text{const}$;

В) на Ω задан комплекс геометрически совместных конечных элементов, удовлетворяющий обобщённым условиям квазиоднородности с параметром сетки h, см. [8, 9], где h — максимальный из диаметров конечных элементов. Комплекс индуцирует пространство $\mathbb{V}_h(\Omega) \subset H_0^n(\Omega)$, в котором для некоторого $l \ge n$ $\forall w \in H^l(\Omega)$ найдётся такое приближение $\mathcal{I}w$, что $\| w - \mathcal{I}w \|_{H^k(\Omega)} \le c_{k,l} h^{l'-k} \| w \|_{H^{l'}(\Omega)}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $n \le l' \le l$, где $\mathcal{I}$ — линейный оператор.

Положительное целое l характеризует, очевидно, степень точности метода. Условие А) введено лишь с целью избежать учёта оценок аппроксимации главных и естественных краевых условий. Введём также обозначения μ_1, μ_2 для положительных постоянных в неравенствах $\mu_1 \mathrm{I} \le \mathbf{A} \le \mu_2 \mathrm{I}$, $\forall x \in \bar{\Omega}$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица.

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* А), Б), В), $u \in H^r(\Omega)$, $r \ge n$. *Тогда* $\sigma_*^{-1} \le c_\dagger h^{2s}$ *с постоянной* $c_\dagger = \left(\dfrac{\mu_2}{\mu_1}\right) c_\circ c_{n,t}$, *где* $s = \min\,(n, l - n)$ *и* $t = \min\,(2n, l)$.

Если $f \in L^2(\Omega)$, то, опираясь на условие Б), получим $\| u \|_{H^{2n}(\Omega)} \le 2c_\text{o} \| f \|_{L^2(\Omega)}$ при $\forall \sigma \ge 0$, откуда следует, что при таких f лемма применима по крайней мере к м.к.э. порядка точности h^l, $\forall l = n, n + 1, \ldots, 2n$. Дополнительно в доказательстве леммы используются неравенство $\| e_\text{fem} \|_{L^2(\Omega)} \le \| e_\text{fe} \|_{L^2(\Omega)}$ для $e_\text{fem} = u - u_\text{fem}$ и $e_\text{fe} = u - u_\text{fe}$, где u_fem — решение м.к.э. для задачи (4) и u_fe — решение м.к.э. для той же задачи при $\sigma \equiv 0$, и оценка для $\| e_\text{fe} \|_{L^2(\Omega)}$ посредством приёма Нитше [10]. Для $n = 1$ и $\sigma = 0$ лемма доказана в [11].

Следствие 1. *Согласно теореме* 1 *и лемме* 1 *при* $l \ge 2n$ *и* $\sigma \le \sigma_*$ *для погрешности* e_fem *решений м.к.э. имеем апостериорную оценку*

$$\begin{aligned} \| u_\text{fem} - u \|^2 \le \frac{2}{1 + c_\dagger h^{2n}\sigma} \Big[&\| \mathbf{A}\mathcal{D}u_\text{fem} - \mathbf{z} \|^2_{\mathbf{A}^{-1}} + \\ &+ c_\dagger h^{2n} \| f - \sigma u_\text{fem} - \mathcal{D}^*\mathbf{z} \|^2_{L^2(\Omega)} \Big], \end{aligned} \qquad (10)$$

относящуюся к согласованным.

Согласованность очевидна при применении м.к.э. повышенной гладкости, т.е.

$$\mathbb{V}_h(\Omega) = \mathbb{V}_h^{(2n)}(\Omega) \subset H^{2n}(\Omega),$$

что характерно для изогеометрических м.к.э., получивших распространение при решении эллиптических уравнений 2-го порядка [12]. Действительно, пусть $u \in H^l(\Omega)$, $l \ge 2n$, $u_\text{fem} \in \mathbb{V}_h^{(2n)}(\Omega)$, имеют место оценки скорости сходимости

$$\| u - u_\text{fem} \|_{H^k(\Omega)} \le c_{k,l} h^{l-k} \| u \|_{H^l(\Omega)}, \qquad (11)$$
$$k = 0, 1, \ldots, 2n.$$