Казанский институт (филиал)
Российского государственного торгово-экономического университета

Кафедра информатики и высшей математики

Талызин В.А.

МАТЕМАТИКА-2

Методические рекомендации к выполнению
контрольной работы №2
для студентов 1-го курса заочного отделения

Казань - 2003

Тема 1. Система линейных уравнений

В общем случае система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

Через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обозначены неизвестные, подлежащие определению, величины $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$, называемые *коэффициентами* системы, и величины $b_1, b_2, \ldots, b_m$, называемые *свободными членами*, считаются известными. *Решением системы* (1) называют такую совокупность n чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, которая при подстановке в систему (1) на место неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обращает все уравнения системы в тождества. Система уравнений (1) либо не имеет решения, либо имеет единственное решение, либо имеет бесчисленное множество решений. Две системы линейных уравнений называются *эквивалентными*, если решение одной из них является решением другой и наоборот. Коэффициенты системы образуют матрицу, которую называют основной матрицей системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если $m = n$, то матрица A является квадратной и ее определитель $|A| = \Delta$ называется *определителем системы.* Если определитель квадратной системы уравнений $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам, называемых *формулами Крамера:*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j = 1,2,3,\ldots,n.$$

Здесь Δ - определитель системы, Δ_j – определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j – го столбца столбцом ее свободных членов.

Пример 1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение. Найдем определитель системы

$$\Delta = \left|\begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{matrix} = 2\cdot(-1)\cdot(-1) + 3\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 3\cdot 4 - 1\cdot(-1)\cdot 1 -$$

$$-4\cdot 2\cdot 2 - 3\cdot 3\cdot(-1) = 2 + 6 + 12 + 1 - 16 + 9 = 14.$$

Далее вычислим определитель Δ_1, заменив первый столбец матрицы системы на столбец свободных членов

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1)(-1) + 3\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 4 - 2(-1)\cdot 1 - (-1)\cdot 1\cdot 3 -$$

$$-1\cdot 2\cdot 4 = 1 + 12 + 4 + 2 + 3 - 8 = 14.$$

Аналогично находим определители Δ_2, Δ_3:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2&1&1\\3&1&2\\1&2&-1\end{vmatrix}=0,\Delta_3=\begin{vmatrix}2&3&1\\3&-1&1\\1&4&2\end{vmatrix}=-14.$$

Отсюда по формулам Крамера находим решение системы

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{14}{14}=1,\ \ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{0}{14}=0,\ \ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-14}{14}=-1.$$

Общую систему линейных уравнений вида (1) можно решить методом Гаусса - методом *последовательного исключения неизвестных*. Исключение неизвестных методом Гаусса удобно выполнять, осуществляя преобразования не с самими уравнениями, а с матрицей их коэффициентов, к которой справа добавлен столбец свободных членов

$$A_1=\left(\begin{array}{cccc|c}a_{11}&a_{12}&.&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&.&a_{2n}&b_2\\.&.&.&.&.\\a_{m1}&a_{m2}&.&a_{mn}&b_m\end{array}\right).$$

Полученную матрицу A_1 называют *расширенной матрицей системы.*

Элементарными преобразованиями строк матрицы называют:

1. Умножение всех элементов строки на число, не равное нулю.
2. Перестановка строк матрицы.
3. Прибавление к элементам строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на общее произвольное число.

Метод Гаусса заключается в том, чтобы с помощью элементарных преобразований строк основную матрицу системы A привести к ступенчатому (или треугольному) виду. Если вернуться к уравнениям, то это означает, что неизвестная x_1 содержится только в первом уравнении, неизвестная x_2 - только в первом и втором уравнении и т. д. Таким образом, неизвестные системы частично исключаются из исходных уравнений системы, а полученная новая система уравнений является эквивалентной исходной системе. Рассмотрим решение методом Гаусса на примерах.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5,\\ x_1+x_2-x_3=0,\\ 4x_1-x_2+5x_3=3.\end{cases}\qquad(2)$$

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&1&5\\1&1&-1&0\\4&-1&5&3\end{array}\right)\qquad(3)$$

Поменяем местами первую и вторую строку в матрице (3), чтобы получить $a_{11}=1$ (в этом случае упрощаются последующие вычисления).

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&1&5\\1&1&-1&0\\4&-1&5&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\3&2&1&5\\4&-1&5&3\end{array}\right)\qquad(4)$$

Символ “~” обозначает эквивалентность матриц. Умножим первую строку полученной матрицы (4) на число (-3) и прибавим соответственно к элементам второй строки, далее первую строку матрицы (4) умножим на число (-5) и прибавим к элементам третьей строки этой матрицы. В результате получим матрицу, которой соответствует система уравнений, содержащая неизвестную x_1 только в первом уравнении

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \big| & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \big| & 5 \\ 4 & -1 & 5 & \big| & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \big| & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \big| & 5 \\ 0 & -5 & 9 & \big| & 3 \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Так как в матрице (5) $a_{22} = -1$, то, умножая вторую строку этой матрицы на число (-5) и прибавляя ее к третьей строке, получим основную матрицу треугольного вида. Для упрощения разделим элементы последней строки на число (-11):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \big| & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \big| & 5 \\ 0 & -5 & 9 & \big| & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \big| & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \big| & 5 \\ 0 & 0 & -11 & \big| & -22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \big| & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \big| & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \big| & 2 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Расширенной матрице (6) соответствует следующая система уравнений, эквивалентная исходной системе (2)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Отсюда из третьего уравнения получаем $x_3 = 2$. Подставляя найденное значение x_3 во второе уравнение, определяем неизвестную x_2:

$$-x_2 = 5 - 4x_3 = 5 - 4 \cdot 2 = -3, \qquad x_2 = 3.$$

Наконец, после подстановки найденных значений x_2, x_3 в первое уравнение, находим неизвестную x_1: $x_1 = -x_2 + x_3 = -3 + 2 = -1$. Таким образом, решение системы единственное: $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 2$.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 2. \end{cases} \qquad (7)$$

Решение. Запишем и преобразуем расширенную матрицу системы (7)

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & \big| & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & \big| & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & \big| & 0 \\ 4 & 3 & -4 & -1 & \big| & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & \big| & 1 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & \big| & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & \big| & 0 \\ 4 & 3 & -4 & -1 & \big| & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & \big| & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & \big| & -3 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & \big| & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -5 & \big| & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & \big| & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -5 & \big| & -2 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & \big| & -1 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & \big| & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & \big| & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -5 & \big| & -2 \\ 0 & 0 & -13 & 20 & \big| & 7 \\ 0 & 0 & -13 & 20 & \big| & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & \big| & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -5 & \big| & -2 \\ 0 & 0 & -13 & 20 & \big| & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \big| & 0 \end{pmatrix}.$$

Расширенная матрица, полученная на последнем шаге путем вычитания из элементов четвертой строки соответствующих элементов третьей строки, содержит нулевую строку и имеет ступенчатый вид. Отсюда следует, что исходной системе уравнений эквивалентна система из трех уравнений с 4 неизвестными

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ -x_2 + 4x_3 - 5x_4 = -2, \\ \quad -13x_3 + 20x_4 = 7. \end{cases}$$

Неизвестную x_4 перенесем в правые части уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 - x_4, \\ -x_2 + 4x_3 = -2 + 5x_4, \\ \quad -13x_3 = 7 - 20x_4. \end{cases}$$

Отсюда определяем

$$x_3 = \frac{20x_4 - 7}{13}, \qquad x_2 = 4x_3 + 2 - 5x_4 = \frac{15x_4 - 2}{13},$$

$$x_1 = 1 - x_4 - x_2 + 2x_3 = 1 - x_4 - \frac{15x_4 - 2}{13} + \frac{40x_4 - 14}{13} = \frac{12x_4 + 1}{13}.$$

Задавая переменной x_4 произвольное значение $x_4 = C$, найдем бесконечное множество решений системы

$$x_1 = \frac{12C+1}{13}, x_2 = \frac{15C-2}{13}, x_3 = \frac{20C-7}{13}, x_4 = C.$$

Если расширенная матрица системы приведена к ступенчатому виду, когда в нулевой строке основной матрицы свободный член отличен от нуля, то система не имеет решения. Например, последняя строка имеет вид $\left(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \middle| 1\right)$. Тогда соответствующее уравнение системы привелось к неверному равенству $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0 = 1$.

Пример 4. Предприятие выпускает три вида товаров, при производстве которых используется три типа ресурсов: рабочая сила, сырье, оборудование. Нормы расхода каждого из них (в условных единицах) на производство единицы каждого товара и объем ресурсов на 1 день заданы таблицей 1.

Таблица 1

Вид ресурсов	Норма расхода ресурсов на производство ед. товара			Объем ресурсов на 1 день
	1 вид	2 вид	3 вид	
Рабочая сила	1	1	2	800
Сырье	3	2	4	1700
Оборудование	2	1	3	1100

Найти ежедневный объем выпуска каждого товара.

Решение. Пусть x_1, x_2, x_3 - ежедневный выпуск соответственно товаров 1,2 и 3-го вида. Тогда в соответствии с нормами расхода ресурсов каждого типа имеем систему линейных уравнений, содержащих неизвестные x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 800, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1700, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1100. \end{cases}$$

Решим ее методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 800 \\ 3 & 2 & 4 & 1700 \\ 2 & 1 & 3 & 1100 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 800 \\ 0 & -1 & -2 & -700 \\ 0 & -1 & -1 & -500 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 800 \\ 0 & 1 & 2 & 700 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right)$$

Отсюда находим $x_1 = 100, x_2 = 300, x_3 = 200$, т.е. предприятие ежедневно выпускает 100 ед. товаров 1-го вида, 300 ед. товаров 2-го вида и 200 ед. товаров 3-го вида.