

УДК 373.167.1:512+512(075.3)

ББК 22.14я721

М34

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

**Авторы:** С. М. Никольский, М. К. Потапов,  
Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин

На учебник получены **положительные** заключения  
**научной** (заключение РАО № 475 от 14.11.2016 г.),  
**педагогической** (заключение РАО № 164 от 05.10.2016 г.)  
и **общественной** (заключение РКС № 158-ОЭ от 19.12.2016 г.) экспертиз

Издание выходит в pdf-формате.

#### Условные обозначения:

**1.1** — пункт для базового уровня



— начало материала, необязательного  
для базового уровня



— окончание материала, необязательного  
для базового уровня

**1.7\*** — пункт для углублённого уровня



— факты, свойства, определения, формулы,  
которые нужно помнить

**4.9°** — задания для устной работы

**1.2** — задания для базового уровня

**5.4\*** — задания повышенной трудности

**2.5** — задания для углублённого уровня

**5.90\*** — задания для углублённого уровня повышенной трудности

**111** — задания для повторения

**Математика: алгебра и начала математического анализа,**  
**М34 геометрия. Алгебра и начала математического анализа.**

**11 класс** : базовый и углублённый уровни : учебник : издание  
в pdf-формате / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Ре-  
шетников, А. В. Шевкин. — 9-е изд., стер. — Москва : Про-  
свещение, 2022. — 464 с. : ил. — (МГУ — школе).

ISBN 978-5-09-101574-4 (электр. изд.). — Текст : электронный.

ISBN 978-5-09-087641-4 (печ. изд.).

Учебник позволяет изучать материал курса алгебры и начал математиче-  
ского анализа на базовом уровне, рассчитанном на 3 часа в неделю, а также  
на углублённом уровне в двух вариантах, рассчитанных на 4 и на 5 часов  
в неделю.

Учебник нацелен на подготовку учащихся к обучению в вузах.

УДК 373.167.1:512+512(075.3)

ББК 22.14я721

ISBN 978-5-09-101574-4 (электр. изд.)

ISBN 978-5-09-087641-4 (печ. изд.)

© АО «Издательство «Просвещение»,  
2014, 2019

© Художественное оформление.

АО «Издательство «Просвещение»,  
2014, 2019

Все права защищены

# Оглавление

## ГЛАВА I. ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНЫЕ. ИНТЕГРАЛЫ

<b>§ 1. Функции и их графики</b>	<b>3</b>
1.1. Элементарные функции	3
1.2. Область определения и область изменения функции. Ограниченность функции	5
1.3. Чётность, нечётность, периодичность функций	8
1.4. Промежутки возрастания, убывания, знакопостоянства и нули функций	14
1.5. Исследование функций и построение их графиков элементарными методами	18
1.6. Основные способы преобразования графиков	21
1.7*. Графики функций, содержащих модули	34
1.8*. Графики сложных функций	39
<b>§ 2. Предел функции и непрерывность</b>	<b>45</b>
2.1. Понятие предела функции	45
2.2. Односторонние пределы	49
2.3. Свойства пределов функций	56
2.4. Понятие непрерывности функции	60
2.5. Непрерывность элементарных функций	65
2.6*. Разрывные функции	67
<b>§ 3. Обратные функции</b>	<b>72</b>
3.1. Понятие обратной функции	72
3.2*. Взаимно обратные функции	75
3.3*. Обратные тригонометрические функции	80
3.4*. Примеры использования обратных тригонометрических функций	85
<b>§ 4. Производная</b>	<b>89</b>
4.1. Понятие производной	89
4.2. Производная суммы. Производная разности	96
4.3*. Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференциал	99
4.4. Производная произведения. Производная частного	101
4.5. Производные элементарных функций	103
4.6. Производная сложной функции	108
4.7*. Производная обратной функции	111
<b>§ 5. Применение производной</b>	<b>114</b>
5.1. Максимум и минимум функции	114
5.2. Уравнение касательной	121
5.3. Приближённые вычисления	125
5.4*. Теоремы о среднем	127
5.5. Возрастание и убывание функции	129
5.6. Производные высших порядков	134

5.7*.	Выпуклость графика функции . . . . .	137
5.8*.	Экстремум функции с единственной критической точкой . . . . .	141
5.9.	Задачи на максимум и минимум . . . . .	145
5.10*.	Асимптоты. Дробно-линейная функция . . . . .	149
5.11.	Построение графиков функций с применением производных . . . . .	156
5.12*.	Формула и ряд Тейлора . . . . .	162
§ 6.	<b>Первообразная и интеграл . . . . .</b>	<b>167</b>
6.1.	Понятие первообразной . . . . .	167
6.2*.	Замена переменной. Интегрирование по частям . . . . .	173
6.3.	Площадь криволинейной трапеции . . . . .	175
6.4.	Определённый интеграл . . . . .	178
6.5*.	Приближённое вычисление определённого интеграла . . . . .	181
6.6.	Формула Ньютона — Лейбница . . . . .	185
6.7.	Свойства определённого интеграла . . . . .	191
6.8*.	Применение определённых интегралов в геометрических и физических задачах . . . . .	196
6.9*.	Понятие дифференциального уравнения . . . . .	202
6.10*.	Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям . . . . .	206
	<b>Исторические сведения . . . . .</b>	<b>212</b>

## ГЛАВА II. УРАВНЕНИЯ. НЕРАВЕНСТВА. СИСТЕМЫ

§ 7.	<b>Равносильность уравнений и неравенств . . . . .</b>	<b>214</b>
7.1.	Равносильные преобразования уравнений . . . . .	214
7.2.	Равносильные преобразования неравенств . . . . .	219
§ 8.	<b>Уравнения-следствия . . . . .</b>	<b>225</b>
8.1.	Понятие уравнения-следствия . . . . .	225
8.2.	Возведение уравнения в чётную степень . . . . .	229
8.3.	Потенцирование логарифмических уравнений . . . . .	231
8.4.	Другие преобразования, приводящие к уравнению-следствию . . . . .	233
8.5.	Применение нескольких преобразований, приводящих к уравнению-следствию . . . . .	237
§ 9.	<b>Равносильность уравнений и неравенств системам . . . . .</b>	<b>240</b>
9.1.	Основные понятия . . . . .	240
9.2.	Решение уравнений с помощью систем . . . . .	243
9.3.	Решение уравнений с помощью систем (продолжение) . . . . .	247
9.4*.	Уравнения вида $f(\alpha(x)) = f(\beta(x))$ . . . . .	253
9.5.	Решение неравенств с помощью систем . . . . .	256
9.6.	Решение неравенств с помощью систем (продолжение) . . . . .	260
9.7*.	Неравенства вида $f(\alpha(x)) > f(\beta(x))$ . . . . .	263
§ 10.	<b>Равносильность уравнений на множествах . . . . .</b>	<b>266</b>
10.1.	Основные понятия . . . . .	266
10.2.	Возведение уравнения в чётную степень . . . . .	268
10.3*.	Умножение уравнения на функцию . . . . .	270
10.4*.	Другие преобразования уравнений . . . . .	273
10.5*.	Применение нескольких преобразований . . . . .	277
10.6*.	Уравнения с дополнительными условиями . . . . .	281

<b>§ 11. Равносильность неравенств на множествах</b>	283
11.1. Основные понятия	283
11.2. Возведение неравенства в чётную степень	285
11.3*. Умножение неравенства на функцию	288
11.4*. Другие преобразования неравенств	290
11.5*. Применение нескольких преобразований	294
11.6*. Неравенства с дополнительными условиями	298
11.7*. Нестрогие неравенства	301
<b>§ 12. Метод промежутков для уравнений и неравенств</b>	303
12.1. Уравнения с модулями	303
12.2. Неравенства с модулями	307
12.3. Метод интервалов для непрерывных функций	311
<b>§ 13*. Использование свойств функций при решении уравнений и неравенств</b>	314
13.1*. Использование областей существования функций	314
13.2*. Использование неотрицательности функций	317
13.3*. Использование ограниченности функций	319
13.4*. Использование монотонности и экстремумов функций	325
13.5*. Использование свойств синуса и косинуса	328
<b>§ 14. Системы уравнений с несколькими неизвестными</b>	331
14.1. Равносильность систем	331
14.2. Система-следствие	337
14.3. Метод замены неизвестных	344
14.4*. Рассуждения с числовыми значениями при решении систем уравнений	348
<b>§ 15*. Уравнения, неравенства и системы с параметрами</b>	355
15.1*. Уравнения с параметром	355
15.2*. Неравенства с параметром	360
15.3*. Системы уравнений с параметром	363
15.4*. Задачи с условиями	367
<b>Исторические сведения</b>	374

## ГЛАВА III. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

<b>§ 16*. Алгебраическая форма и геометрическая интерпретация комплексных чисел</b>	379
16.1*. Алгебраическая форма комплексного числа	379
16.2*. Сопряжённые комплексные числа	384
16.3*. Геометрическая интерпретация комплексного числа	386
<b>§ 17*. Тригонометрическая форма комплексных чисел</b>	390
17.1*. Тригонометрическая форма комплексного числа	390
17.2*. Корни из комплексных чисел и их свойства	396
<b>§ 18*. Корни многочленов. Показательная форма комплексных чисел</b>	401
18.1*. Корни многочленов	401
18.2*. Показательная форма комплексного числа	405
<b>Исторические сведения</b>	408

<b>ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ</b> . . . . .	410
<b>Приложения</b> . . . . .	437
1. Таблица производных . . . . .	437
2. Таблица интегралов . . . . .	438
3. Свойства логарифмов . . . . .	438
4. Основные формулы тригонометрии . . . . .	439
5. Простейшие тригонометрические уравнения . . . . .	439
<b>Предметный указатель</b> . . . . .	440
<b>Ответы.</b> . . . . .	442
<b>Список литературы</b> . . . . .	460

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

**Никольский Сергей Михайлович**  
**Потапов Михаил Константинович**  
**Решетников Николай Николаевич**  
**Шевкин Александр Владимирович**

**Математика: алгебра и начала  
математического анализа, геометрия**

**АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**  
**11 класс**

Базовый и углублённый уровни  
Учебник

Центр математики

Ответственный за выпуск *П. А. Бессарабова*  
Редактор *Л. В. Кузнецова*  
Младшие редакторы *Е. А. Андреевкова, С. В. Дубова*  
Художники *П. С. Барбаринский, О. П. Богомолова*  
Художественный редактор *Т. В. Глушкова*  
Компьютерная графика *А. Г. Вьюниковской, И. В. Губиной,*  
*К. В. Солоненко, О. Ю. Тупикиной*  
Технический редактор и верстальщик *А. Г. Хуторовская*  
Корректор *Т. А. Дич*

Подписано в печать 12.08.2021. Формат 70×90/16. Гарнитура SchoolBookCSanPin.  
Уч.-изд. л. 36,42 + 0,55 форз. Усл. печ. л. 33,93.  
Тираж экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».  
Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16,  
стр. 3, этаж 4, помещение I.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — [vopros@prosv.ru](mailto:vopros@prosv.ru).