ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО ВГУ)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

по курсам: **«Математический анализ»**

«Многомерный математический анализ»

для студентов 1 курса экономического факультета по направлениям

«Экономика» и «Экономическая безопасность»

Воронеж 2015

СОДЕРЖАНИЕ

Пример 4.

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}}$

Решение:

В данном примере имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. В подобных примерах, для раскрытия неопределенности числитель и знаменатель необходимо делить на степень x с наивысшим показателем, а затем перейти к пределу, применяя теоремы о пределах

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+3\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}+5\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt{x}}}{\sqrt{3-\dfrac{2}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+3\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}+5\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt{x}}}{\sqrt{3-\dfrac{2}{x}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+3\dfrac{1`}{x^{\frac{1}{6}}}+5\dfrac{1}{x^{\frac{3}{10}}}}{\sqrt{3-\dfrac{2}{x}}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}2+3\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^{\frac{1}{6}}}+5\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^{\frac{3}{10}}}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3-\dfrac{2}{x}}}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Пример 5.

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

Решение:

Преобразуем разность синусов и используем формулу $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (первый замечательный предел) и свойства пределов.

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}}{x-a}=\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\lim_{x\to a}\frac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}=$$

$$=\cos\frac{2a}{2}\cdot 1=\cos a$$

Ответ: $\cos a$.

Пример 6.

Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+2}\right)^{2n+1}$

Решение:

В этом примере предел основания равен 1 (следует разделить числитель на знаменатель), а показатель степени стремится к бесконечности. Имеем неопределенность вида 1^{∞}. Используем второй замечательный предел-
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{\alpha\to 0}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} = e \approx 2{,}71828...$. Сделав очевидные преобразования, получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\frac{n-1}{n+2}-1\right)\right]^{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-3}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{-3}}\right]^{\frac{-3}{n+2}(2n+1)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-3(2n+1)}{n+2}} = e^{-3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n=2}} = e^{-6}$$

Ответ: e^{-6}.

Весьма полезными при нахождении пределов функций является знание следующих пределов

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \tag{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x} = \ln a \quad (a>0) \tag{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha \tag{4}$$

Пример 7.

Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} n[\ln(n+3)-\ln n]$.

Решение:

Заменяя разность логарифмов логарифмом дроби, и, используя формулу (1), получим

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\ln(n+3)-\ln n\right]=\lim_{n\to\infty} n\cdot\ln\frac{n+3}{n}=\lim_{n\to\infty} n\cdot\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\frac{3}{n}}=3.$$

Ответ: 3.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

а) Найти область определения функции.

б) Вычислить следующие пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

1. а). $y=\arcsin(2-x)+\ln x$	б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{x-2}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10^n-2}{10^{n+1}+5}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^x$
2. а). $y=\lg\left(3^x-3^{-x}\right)$	б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}$ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}+\frac{1}{1-x^2}\right)$ $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)tg\frac{\pi x}{4}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}$
3. а). $y=\sqrt{2+x-x^2}$	б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{3x^2-6x+8}{x-4}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^3-1}$ $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln n-\ln(n-3))n$
4. а). $y=\sqrt{16-x^2}+\sqrt[3]{2x+3}$	б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5+7\cdot 2^n}{2^{n+2}+5}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}$

	$\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-10}{n+3}\right)^{2n-1}$
5. а). $y=\lg\sin x$	б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-6x+4}$ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x+\sqrt{x+2}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-10x}-x\right)$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+2}\right)^{n-3}$
6. а). $y=\arccos(2\sin x)$	б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{1-x}$ $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$	$\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{m^2-m-1}{\sqrt{m^4+2}+5m^2}$ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{x}$
7. а). $y=\lg(x-2)+\arccos\dfrac{x}{3}$	б) $\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}}\dfrac{2x^2-9x+10}{2x-5}$ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{3-x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x^2-2x\right)x}{x^3+1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}$ $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{2t-4}{2t+1}\right)^{t+1}$
8. а). $y=\sqrt{\sin x}$	б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{2-x}$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-2x\right)$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{\sqrt{x}-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^{x-2}$
9. а). $y=\dfrac{x-1}{x^2-5x-6}$	б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{2x^2-1}\right)$ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{\sin(x-a)}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}}$

ŋqdqʏəʏ bɆ dədɆbʏɜə d ɛɔɑbɔʏ Ɉqdqʏqʏè

10. а). $y=\sqrt{1+x}-2\sqrt[4]{3-x}$	б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2x^2+1}}{x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{2x}$
11. а). $y=\arcsin(tgx)$	б) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{5}}\dfrac{15x^2-2x-1}{x+\frac{1}{5}}$ $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+3}-x\right)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+2}\right)^{x-1}$
12. а). $y=\sqrt{2x-x^3}$	б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{x^3-27}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-1}{x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(ctg2x-2\sin^{-1}x\right)$ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x+7}\right)^{4x}$
13. а). $y=\sqrt{(9-x^2)(x^2-4)}$	б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$ $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{x+\sqrt{x+2}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\cdot 5^x-3}{9\cdot 5^{x1}+4}$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^2 x}{\frac{\pi}{2}-x}$ $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{3x}}$
14. а). $y=\dfrac{x-8}{x^2-7x+12}$	б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+\sqrt{3n^3+1}}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\frac{x}{2}}{2x^2}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-6}{5x+2}\right)^{\frac{x}{2}}$
15. а). $y=\lg\cos x$	б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2+3x-1}$	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^{n+2}+1}{3-7^n}$