

УДК 519.1  
ББК 22.176  
И20

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *Е. В. Дыбкова* (С.-Петербург. ун-т),  
д-р физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник *С. В. Дужин* (С.-Петербург. отд.  
математического ин-та РАН (ПОМИ РАН))

*Рекомендовано к публикации Учебно-методической комиссией  
математико-механического факультета  
Санкт-Петербургского государственного университета*

Иванов М. А., Якубович Ю. В.

**И20 Введение в комбинаторику. Теория и задачи:** учеб. пособие. —  
СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2018. — 136 с.

ISBN 978-5-288-05792-2

В учебном пособии рассматриваются основные понятия комбинаторики, которые лежат в основе многих математических доказательств. Материал изложен доступным языком без сложного математического аппарата, что отличает настоящее пособие от других учебников по комбинаторике. Помимо теоретического материала, в учебном пособии представлено около 330 задач различного уровня сложности.

Пособие предназначено для студентов младших курсов математических специальностей, но может быть также полезно старшеклассникам, интересующимся математикой.

УДК 519.1  
ББК 22.176

При оформлении обложки использована цв. литография  
В. В. Кандинского «Фиолетовый». 1923 г.  
Shutterstock.com

© Санкт-Петербургский  
государственный  
университет, 2018

ISBN 978-5-288-05792-2

© М. А. Иванов, Ю. В. Якубович, 2018

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	5
<b>Список используемых обозначений</b> .....	6
<b>1. Метод математической индукции</b> .....	7
1.1. Неформальное введение .....	—
1.2. Формализация и обобщения .....	8
Задачи .....	9
<b>2. Основные комбинаторные объекты и методы</b> .....	13
2.1. Простейшие способы комбинаторных подсчетов .....	—
2.2. $C_n^m$ и его свойства .....	16
2.3. Наборы с повторениями .....	18
2.4. Формула включений-исключений .....	19
2.5. Разбиения перестановок на циклы .....	21
2.6. Разбиения множеств .....	28
2.7. Разбиения натуральных чисел .....	26
Задачи .....	23
<b>3. Введение в теорию графов</b> .....	48
3.1. Неформальное введение .....	—
3.2. Вершины и рёбра .....	49
3.3. Изоморфизмы графов .....	50
3.4. Пути, циклы и маршруты .....	51
3.5. Деревья .....	53
3.6. Двудольные графы .....	55
3.7. Эйлеровы графы .....	56
3.8. Лемма Шпернера .....	57
Задачи .....	58
<b>4. Элементарная теория вероятностей</b> .....	66
4.1. Схема равновероятных исходов .....	—
4.2. Условная вероятность и независимость .....	69
4.3. Применение условных вероятностей .....	73
4.4. Схема Бернулли .....	75
Задачи .....	77
<b>5. Рекуррентные соотношения</b> .....	86
5.1. Неформальное введение .....	—
5.2. Линейные однородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами .....	88
5.3. Линейные неоднородные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами .....	91
5.4. Числа Каталана .....	94
Задачи .....	95
<b>6. Производящие функции</b> .....	102
6.1. Основные понятия .....	—
6.2. Производящие функции и рекуррентные соотношения .....	111
6.3. Экспоненциальные производящие функции .....	119

6.4. Разбиения целых чисел и производящие функции.....	120
Задачи.....	122
<b>7. Дополнительные материалы .....</b>	<b>129</b>
Вариант экзамена 2011 г.....	—
Вариант экзамена 2012 г.....	130
Вариант экзамена 2013 г.....	131
Вариант экзамена 2014 г.....	132
Вариант экзамена 2015 г.....	133
Вариант экзамена 2016 г.....	134
<b>Список литературы для дополнительного чтения .....</b>	<b>135</b>