Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждениевысшего профессионального образования
«Самарская государственная сельскохозяйственная академия»

Е. В. Бунтова
С. В. Плотникова

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ВУЗОВ

Рекомендовано УМО РАЕ по классическому университетскому и техническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 23.03.03 – «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов»

Кинель 2015

ББК22.1я7
УДК 519.2 (075)
Б-91

Рецензенты:
канд.техн. наук, доцент, зав. кафедрой «Физика и математика»
ФГБОУ ВПО Пензенской ГСХА
А.В.Поликанов;
д-р пед. наук, доцент, зав. кафедрой «Высшая математика»
ФГБОУ ВПО Самарского ГАСУ
О. В. Юсупова

Бунтова, Е. В.
Б-91 Прикладная математика для инженеров сельскохозяйственных вузов : учебное пособие / Е. В. Бунтова, С. В. Плотникова.– Кинель : РИЦСГСХА, 2015. – 123 с.
ISBN 978-5-88575-369-2

В учебном пособии рассмотрены численные методы анализа математических моделей, численное интегрирование, численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, интерполяция функций, аппроксимация функций методом наименьших квадратов, классические методы математического программирования.

Пособие предназначено для бакалавров, обучающихся по направлению подготовки 23.03.03 – «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов».

ББК22.1я7
УДК 519.2 (075)

ISBN 978-5-88575-369-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Прикладная математика – это один из разделов математики, который включает создание и обоснование численных алгоритмов для решения сложных задач различных областей науки. Главная задача прикладной математики – фактическое нахождение решения с требуемой точностью.

В современных условиях прикладная математика неразрывно связана с компьютерным моделированием. Компьютерное моделирование (вычислительный эксперимент) сокращает потребность в натурных экспериментах. В основе вычислительного эксперимента лежит решение уравнений математической модели численными методами. Полагаться на мощность компьютера не следует, необходимо знать численные методы и тонкости вычисления алгоритмов. Учебное издание содержит материал, в котором изложены вопросы, связанные с построением вычислительного алгоритма и его обоснованием.

Изучение численных методов решения стандартных математических задач есть необходимый элемент овладения современной технологией математического моделирования.

В учебном пособии изложены наиболее эффективные методы, которые имеют широкую область применения.

Кроме того, в пособии показана математическая основа поиска оптимальных решений, которая дает возможность получить наилучшие результаты при соответствующих условиях.

Цель пособия – формирование системы компетенций для решения профессиональных задач, связанных с расчетно-проектной, экспериментально-исследовательской и организационно-управленческой деятельностью.

Пособие состоит из 4 разделов, охватывающих численные методы анализа математических моделей, численное интегрирование, вопросы интерполяции и аппроксимации функций и классические методы математического программирования.

В разделе «Численные методы анализа математических моделей» раскрываются общие понятия математических моделей и численных методов, рассматриваются методы решений алгебраических уравнений и систем линейных уравнений.

Раздел «Численное интегрирование» посвящен вопросам численного интегрирования методами прямоугольников, трапеции, Симпсона и методам решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

В разделе «Интерполяция и аппроксимация функций» рассматриваются интерполяционный полином и аппроксимация функции методом наименьших квадратов.

В разделе «Классические методы математического программирования» даются примеры задач, которые в процессе математического моделирования сводятся к задачам линейного программирования. Приводятся основные сведения о математическом аппарате линейного программирования. Излагается геометрический метод решения задачи линейного программирования с двумя переменными. Уделено внимание изложению алгоритмов симплексного метода решения задач линейного программирования, включая метод искусственного базиса и двойственный симплекс-метод. Рассматриваются вопросы применения теории двойственности линейного программирования и специальные задачи линейного программирования на примере открытых и закрытых транспортных задач.

Материал для самостоятельной работы студентов, словарь основных понятий помогут студентам закрепить теоретические знания на практике.

1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В разнообразных областях приложений математики возникает необходимость получать решения математических задач в числовой форме. Методы численного решения математических задач есть часть математики и входят в содержание естественно-математического и инженерного образования.

Современные численные методы развились в эпоху географических открытий, когда потребовались точные карты, определение координат кораблей на карте, точные часы. Востребованность точной регистрации движения планет способствовала формулированию законов эллиптического движения Кеплера, закона всемирного тяготения Ньютона, открытию дифференциальных уравнений Лейбница, которые описывают поведение любого числа точек в пространстве. Для решения дифференциальных уравнений потребовались численные методы, которые дают точные решения любой системы уравнений.

Развитие численных методов способствовало расширению сферы применения математики в других научных дисциплинах и прикладных разработках.

Например, метод математического моделирования основан на построении и исследовании математических моделей объектов, процессов и явлений, получении информации о них из решения связанных с моделями математических задач. Современная форма метода математического моделирования – вычислительный эксперимент, рассматриваемый как новый теоретический метод исследования различных явлений и процессов. Вычислительный эксперимент включает пять этапов [5]:

- построение математической модели исследуемого объекта;
- построение вычислительного алгоритма – метода приближенного решения поставленной задачи и его обоснования;
- программирование алгоритма на ЭВМ и его тестирование;
- анализ полученных результатов.

Каждый из этапов допускает возврат к любому из предыдущих этапов с целью уточнения и корректировки.

Таким образом, математический анализ процессов и явлений – это анализ, который применяют не к реальным процессам и явлениям, а к математическим моделям процессов и явлений.

1.1. Математические модели и численные методы

Первая стадия математического анализа процесса или явления – это формулировка математической модели. Математическая модель состоит из уравнений, описывающих процесс, в которые в виде коэффициентов входят характеристики процесса или явления [2].

Любое изучаемое явление или процесс связаны с другими явлениями и процессами, которые могут не представлять интерес для рассматриваемой задачи. Математическая модель охватывает только важнейшие для поставленной задачи стороны явления. Наиболее сложная и ответственная работа при постановке задачи – это выбор связей и характеристик явления или процесса, существенных для поставленной задачи и подлежащих включению в математическую модель. Второй этап – это математическое исследование. Численные методы – мощное математическое средство решения поставленной задачи.

Часто возникает необходимость выполнения большого числа математических действий за короткий промежуток времени. Например, суточный прогноз погоды вычисляют за несколько часов, коррекцию траектории ракеты требуется рассчитать за несколько минут, режим работы прокатного станка исправляют за секунды. Современные численные методы и мощные ЭВМ дали возможность решать поставленные задачи в установленные сроки. Следует помнить, что ЭВМ умеют выполнять только арифметические действия и логические операции, поэтому требуется разработать алгоритм, который сводит все вычисления к последовательности арифметических и логических действий. Модель и алгоритм выбирают с учетом скорости и объема памяти ЭВМ. Большинство доказательств сходимости итерационных процессов справедливо только при точном выполнении всех вычислений, практически при вычислениях на ЭВМ число сохраняемых десятичных знаков 10-12 [4].

Следует помнить, что численные методы не отменяют остальные математические методы. Численные методы применяют в комбинации с точными и приближенными аналитическими методами.

1.2. Решение алгебраических уравнений

В инженерных задачах возникает необходимость решения уравнений вида

$$F(x, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \qquad (1.1)$$

где F– заданная функция;x – неизвестная величина;$p_1, p_2, \dots, p_n$ – параметры задачи.

Решениями уравнений называют такие значения x, которые при подстановке в уравнение обращают уравнение в тождество.

Найти решение в аналитическом виде для простейших уравнений – это значит записать формулу, которая выражает искомую величину x в явном виде.

В большинстве случаев уравнения решают численными методами.

Численное решение уравнения проводят в два этапа. На первом этапе определяют интервал изменения переменной x, на котором расположен один корень или определяют приближение окрестности точки x. На втором этапе численным методом определяют величину x, которая соответствует корню уравнения с заданной погрешностью.

Определение величины x, соответствующей корню уравнения с заданной погрешностью, рассчитывают методами:

- половинного деления;
- Ньютона;
- секущих.

1.2.1.Метод половинного деления

Для применения метода половинного деления [2] требуется установить окрестность или отрезок $[a; b]$, на котором расположен один из корней уравнения, который необходимо уточнить с погрешностью E(рис.1.1).

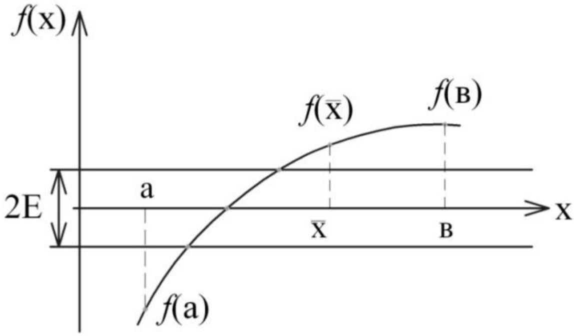

Рис. 1.1. Метод половинного деления

Пусть дано уравнение $f(x) = 0$, где $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a; b]$, причем

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Для нахождения корня уравнения, принадлежащего отрезку $[a; b]$, отрезок делят на две равные части, т.е. выбирают начальное приближение:

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2} \tag{1.2}$$

и вычисляют значение функции $f(\bar{x})$.

В случае $f(\bar{x}) = 0$,$\bar{x}$–корень уравнения. В случае $f(\bar{x}) \neq 0$, выбирают одну из двух частей отрезка $[a; \bar{x}]$ или $[\bar{x}; b]$ для уточнения корня. Корень находится в той половине отрезка, на концах которого функция $f(x)$ имеет разные знаки, т.е. проверяют условие

$$f(a) \cdot f(\bar{x}) < 0.$$

На рисунке 1.1 это отрезок $[a; \bar{x}]$, т.е. для очередного шага уточнения точку bперемещают в середину отрезка $\bar{x}$ и продолжают процесс деления.

Итерационный или повторяющийся процесс деления продолжают до выполнения условия:

$$|b - a| \leq E. \tag{1.3}$$

За приближенное решение принимают среднюю точку последнего промежутка.

Для реализации метода половинного деления выполняют следующие шаги:

- задают в явном виде уравнение, содержащее функцию $f(x)$, корни которого требуется определить;
- определяют начальный интервал $[a;b]$, внутри которого лежит корень;
- задают точность нахождения корня уравнения, содержащего $f(x)$;
- реализовывают в программе итерационную процедуру.

1.2.2. Метод Ньютона

Пусть определено начальное приближение x_0 к одному из корней уравнения

$$F(x, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0. \qquad (1.4)$$

Тогда в точке x_0 вычисляют левую часть решаемого уравнения $f(x_0)$.

Пусть точка x_0 принадлежит отрезку $[a;b]$. В точке $P_0(x_0; f(x_0))$ проводят касательную (рис.1.2) к кривой $y = f(x)$ до пересечения с осью Ox.

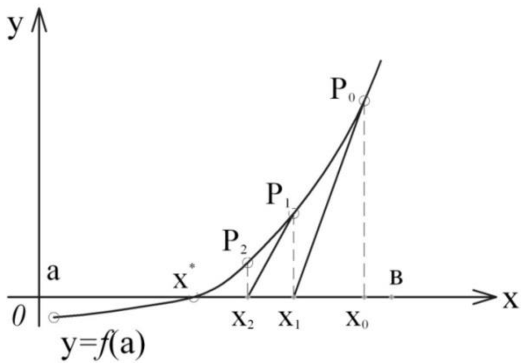

Рис. 1.2. Метод Ньютона

Получают значение x_1, в котором касательная пересекает ось Ox. Угловой коэффициент касательной равен значению производной от функции $f(x)$ в точке касания. Уравнение касательной, проходящей через точку с координатами $P_0\big(x_0; f(x_0)\big)$, имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0). \tag{1.5}$$

Полагая $y = 0$, находят точку пересечения касательной с осью Ox:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{1.6}$$

Абсциссу x_1 точки пересечения берут в качестве приближенного значения корня. Проводят касательную через новую точку с координатами $P_1\big(x_1; f(x_1)\big)$ и находят точку пересечения касательной с осью Ox, получают второе приближение корня x_2.

Последующие приближения определяют аналогично, используя формулы:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

… … … … … … … … … ..

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}. \tag{1.7}$$

Для k-го шага итерационного процесса последнее соотношение принимает вид

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{1.8}$$

Таким образом, требуется вычислить значения производной функции $f(x)$ в каждой точке. Процесс нахождения корня считают законченным в том случае, когда модуль отношения значения функции в точке x_k к производной функции меньше заданной величины погрешности:

$$\left|\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right| < E,$$

т.е.

$$|x_{k+1} - x_k| < E. \tag{1.9}$$