

ББК 22.193
М69

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *С. И. Перегудин* (СПбГУ);
д-р физ.-мат. наук, проф. *В. В. Дикусар* (ВЦ РАН)

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
факультета ПМ-ПУ
С.-Петербургского университета*

Михеев С. Е.

М69 Стабилизация и ускорение численных методов. — СПб.:
Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2014. — 156 с.
ISBN 978-5-288-05533-1

Предлагаемая в книге схема повышения качества сходимости применима к широкому кругу одноточечных и многоточечных итеративных методов, в которых присутствует содержащая, как минимум, оценку текущей погрешности дополнительная информация. Она, дополненная результатом работы алгоритма метода, формирует допустимую область, содержащую решение исходной задачи. При таких посылках перед назначением упомянутого результата следующей итерацией имеет преимущество его точная релаксация на основе принципа минимальности: следующим приближением следует назначить точку, минимизирующую максимум ее удаленности от точек допустимой области. Вычислительная трудоемкость этой задачи минимакса обычно ничтожна в полной трудоемкости итерации.

Книга предназначена специалистам в области итеративных численных методов и может быть полезна аспирантам и студентам, обучающимся по направлению математика.

ББК 22.193

© С. Е. Михеев, 2014
© Издательство
Санкт-Петербургского
университета, 2014

ISBN 978-5-288-05533-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	5
Глава 1. РЕЛАКСАЦИОННОЕ УСКОРЕНИЕ ИТЕРАТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ.....	9
1.1. Принцип минимальности.....	9
1.1.1. Предварительное описание.....	9
1.1.2. Определение принципа минимальности.....	10
1.2. Точные релаксации для метода простых итераций.....	14
1.3. Точные релаксации в скалярном пространстве.....	17
1.3.1. Линейная сходимость ($p = 1$).....	17
1.3.2. Упрощенный метод Ньютона.....	19
1.3.3. Численные эксперименты.....	22
1.3.4. Квадратичная сходимость ($p = 2$).....	29
1.3.5. Оценка коэффициента сжатия в методе Ньютона.....	30
1.3.5.1. Необходимое ограничение характерного параметра.....	33
1.3.5.2. Исследование скалярного случая.....	37
1.3.5.3. Другие оценки.....	49
1.4. Многомерный случай.....	50
1.4.1. Связь метода простой итерации с дифференциальными играми.....	50
1.4.2. Вывод расчетных формул.....	54
1.4.3. Вычислительная трудоемкость точной релаксации.....	57
1.5. Обобщающая схема.....	58
1.6. Статистические свойства точной релаксации метода простой итерации $p = 1$	59
1.6.1. Вероятностная модель, скалярный случай.....	59
1.6.2. Многомерный случай.....	61
1.6.3. Расчет эффективности.....	65
1.7. Асимптотика точной релаксации.....	67
1.8. Нелинейная сходимость $p > 1$	72
1.8.1. Дифференциальные игры с ускоренным движением.....	72
1.8.2. Квадратичная сходимость ($p = 2$).....	75
1.8.3. Сфера холостого хода.....	97
1.8.4. Одномерное пространство.....	99
1.9. Точная релаксация с учетом невязки.....	103
1.9.1. Расчетные формулы.....	104
1.9.2. Сходимость.....	108
1.9.3.	110

Глава 2. ДИСКРЕТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ПОИСКА ЭКСТРЕМУМА	116
2.1. Дискретный метод Чебышева	116
2.1.1. Сходимость невязок к нулю	117
2.1.2. Сходимость погрешностей к нулю	125
2.1.3. Метод секущих	125
2.1.4. Точная релаксация для больших n	128
2.2. Метод Мюллера	130
2.3. Поиск одномерного минимума на основе n -точечной ин- терполяции	133
2.3.1. Оценка скорости сходимости	134
2.3.2. Выбор начальных приближений	141
2.3.3. Точная релаксация для поиска экстремума	143
2.4. Учет погрешностей измерений при минимизации мето- дом трехточечной интерполяции	143
2.4.1. Обсуждение результатов	151
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	153
ЛИТЕРАТУРА	154